

有限差分法の基礎 (1)

運動方程式の数値解法

運動方程式の代表的な数値解法には、格子点法、ラグランジュ法、スペクトル法の3種類がある。以下では3つの方法の概要を述べる。次節以降では格子点法について詳細に述べる。

格子点法 (Grid point method)

対象領域をあらかじめ有限個の点に分割し、格子点上で従属変数を配置する。このとき、分割した点のことを格子点、またはメッシュ (mesh) と呼ぶ。格子点を空間に固定し、オイラー的視点に立って式を解く。この時、独立変数は座標と時間となる。

ラグランジュ法 (Lagrangian method)

個々の流体粒子に着目し、着目した流体粒子の位置と運動量を計算する方法である。独立変数は着目した流体粒子に貼り付けたラベルと時間である。流体が動く度にいちいち格子を作り直さなければならないので、手間と時間がかかる。ラグランジュ法の欠点を改善した方法として、セミラグランジュ法がある。ラグランジュ法が不規則なラベルをそのまま用いて計算を進めるのに対して、セミラグランジュ法は不規則な点からある適当な格子点上の値を求め直しながら計算を進める。

スペクトル法 (Spectral method)

従属変数を空間方向に直交関数を用いた級数に展開し、展開係数の時間発展を解く方法である。直交関数系で展開された元の偏微分方程式は、展開係数の時間に関する常微分方程式になる。この常微分方程式の微分を差分で置き換え、展開係数の数だけの連立代数方程式に直して数値解を求める。

切断波数の個数分の常微分方程式の集まりになる。例えば、 $0 \leq x \leq L$ で周期境界条件の場合を考える。 $u(x, t)$ を展開係数 $\hat{u}_n(t)$ とフーリエ級数で展開する。

$$u(x, t) \approx \sum_{n=0}^N \hat{u}_n(t) e^{-i \frac{2\pi n x}{L}}.$$

N を切断波数とする展開係数 $\hat{u}_n(t) (n = 0, \dots, N)$ の時間発展を解き, $u(x, t)$ を求める. 詳しくは石岡と, それを解説した荻原 2011 を参照されたい.

格子点法の基礎

変数の定義

簡単のため独立変数を x のみとする関数,

$$u = u(x)$$

を考える. ただし, $u(x)$ は領域 R ($0 \leq x \leq L$) で定義されるとする. まず, 領域 R を一定の間隔 Δx ¹⁾ で分割し, 格子点を定義する. 今領域 R を J 個に分割する. このとき $J\Delta x = L$ である. $u(x)$ は $x = j\Delta x$ ($j = 0, 1, \dots, J$) 上の点で与えられて,

$$u_j = u(j\Delta x) \quad (j = 0, 1, \dots, J)$$

となる (図 1). この関数 $u(x)$ を x 軸上のとびとびの点で表し微分を差分で近似することを差分近似という.

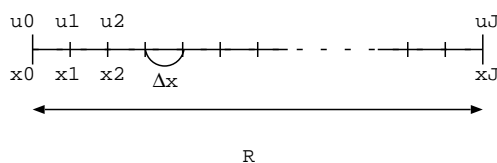


図 1: 格子点のとり方を表す. 離散化された関数 u_n は x_n の点でしか値を持たない.

有限差分に伴う情報落ち

差分近似を正確に行っても, 離散化された $u(j\Delta x)$ は元の連続量である $u(x)$ に比べると表現可能な情報が減ってしまうことは直感的にも理解できる. この情報落ちを有限の波数で切断したフーリエ級数を用いて示す. $0 \leq x \leq L$ のとき $u(x)$ のフーリエ級数展開は,

¹⁾ Δx を格子間隔 (grid interval または grid length) と呼ぶ.

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\frac{J}{2}} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{L} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{L} x \right).$$

切断波数が $J/2$ になるのは元の格子点上の変数 u_j の数が $J+1$ 個のためである. a_n で $J/2$ 個, b_n で $J/2$ 個, a_0 で 1 個, 合計で $J+1$ 個の情報となる. すなわち, 切断波数 N を $J/2$ より大きくしても意味をなさないことに注意されたい. 最も波長の短い成分は $n = J/2$ の成分として与えられる. このとき, 波長 λ は,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{L}{n} \\ &= \frac{J\Delta x}{\frac{J}{2}} \\ &= 2\Delta x. \end{aligned}$$

ゆえに, 差分近似では $2\Delta x$ よりも短い波長は表現できず, それより短い波長の波の情報失われてしまう (図 2 参照).

微分の差分表現

$x = j\Delta x$ における u の微分 $\left. \frac{du}{dx} \right|_j$ を考える. これを差分で表すときその方法は代表的なものとして前方差分, 中央差分, 後方差分の 3 つの方法がある.

前方差分

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_j \approx \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x}$$

中央差分

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_j \approx \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}$$

後方差分

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_j \approx \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x}$$

上記の差分近似はどれも次に示すように $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\left. \frac{du}{dx} \right|_j$ に一致する.

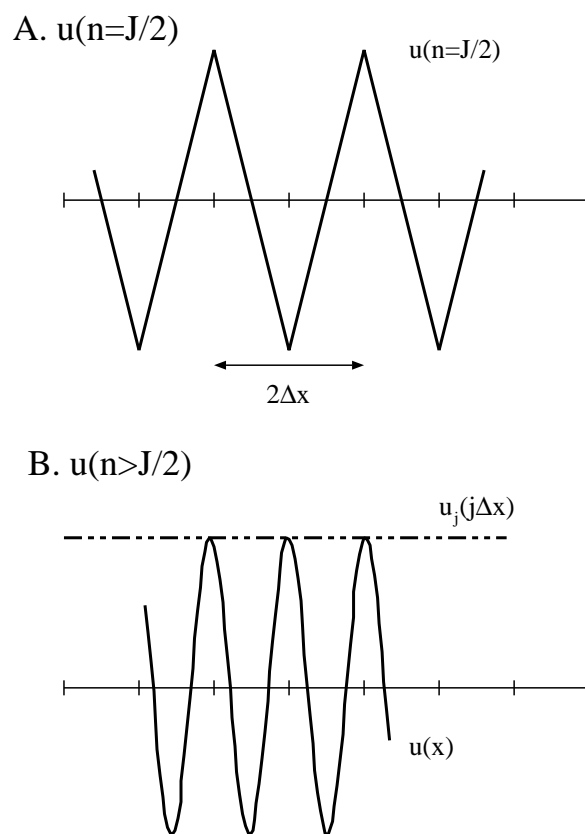


図 2: 図 A は計算機で計算できる最も波長の短い波 (波長 $\lambda = 2\Delta x$) の模式図である。これよりも波長の短い波は図 B のようになり, 連続関数 $u(x)$ を離散化した関数 $u_j(j\Delta x)$ では表現できない ($\lambda = 2\Delta x$ より小さい波長の波を区別できない)。

差分の精度

差分の精度はテイラー展開を用いて調べることができる。まず、前方差分の場合を考える。 u_{j+1} を $j\Delta x$ のまわりでテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= u((j+1)\Delta x) \\ &= u(j\Delta x) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j (\Delta x)^2 + \dots \end{aligned}$$

$u_j = u(j\Delta x)$ であることに注意し、右辺第 1 項を移項して両辺を Δx で割ると、

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j \Delta x + \dots$$

右辺第 1 項は真の値である。したがって、真の値と差分値 $\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x}$ との誤差を ε とすると、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j \Delta x + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j (\Delta x)^2 + \dots \end{aligned}$$

この ε のことを打ち切り誤差 (truncation error) という。

打ち切り誤差を図る尺度として、近似精度の次数 (order of accuracy) がある。近似精度の次数は ε に含まれる最低次の Δx の次数を指す。上記の例の場合、 ε に 1 次の Δx が含まれているので、その精度は 1 次であり、

$$\varepsilon = O(\Delta x)$$

と表す。後方差分も同様にして、

$$\varepsilon = O(\Delta x)$$

である。中央差分の場合も方法は同じである。 u_{j+1} と u_{j-1} をそれぞれ Δx のまわりでテイラー展開し、変形すると、

$$\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j (\Delta x)^2 + \dots$$

となる。ゆえに、中央差分の精度は、

$$\varepsilon = O(\Delta x^2)$$

である。

参考文献

F. Mesinger, A. Arakawa, 1976: Numerical methods used in atmospheric models, GARP PUBLICATIONS SERIES, 17, 1 – 3