

時間差分スキーム(2)

振動方程式での安定性

時間差分スキーム(1)と同様に増幅係数を

$$\lambda = \frac{U^{n+1}}{U^n}$$

として, さまざまなスキームを振動方程式に当てはめた場合の安定性と位相比について考察する.

反復しない1段階スキームの安定性

U^n から U^{n+1} を計算するのに関数 f を1回だけ計算する1段階スキームを取り扱う. この様なスキームを1段階1段のスキームなどと呼ぶこともあるが, 以下では反復しない1段階スキームと呼ぶことにする. 反復しない1段階スキームの一般的な式は,

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t (\alpha f^n + \beta f^{n+1}). \quad (1)$$

但し,

$$\alpha + \beta = 1,$$

である. α と β の与え方によって以下のように分類される.

$\alpha = 1, \beta = 0$	オイラースキーム
$\alpha = 0, \beta = 1$	後退スキーム
$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$	台形スキーム

振動方程式では $f = i\omega U$ なので, 振動方程式のスキームの一般的な形は,

$$U^{n+1} = U^n + i\omega\Delta t (\alpha U^n + \beta U^{n+1}).$$

と表せる. 増幅係数 $\lambda = \frac{U^{n+1}}{U^n}$ を導入すると,

$$\begin{aligned}\lambda &= 1 + i\omega\Delta t(\alpha + \beta\lambda), \\ \lambda(1 - i\omega\Delta t\beta) &= 1 + i\omega\Delta t\alpha, \\ \lambda &= \frac{1 + i\omega\Delta t\alpha}{1 - i\omega\Delta t\beta}.\end{aligned}$$

$p \equiv \omega\Delta t$ と定義すると¹⁾,

$$\lambda = \frac{1 + i\alpha p}{1 - i\beta p}.$$

この式を分母の有理化すると,

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{(1 + i\alpha p)(1 + i\beta p)}{(1 - i\beta p)(1 + i\beta p)} \\ &= \frac{1 + i(\alpha + \beta)p - \alpha\beta p^2}{1 - \beta^2 p^2} \\ &= \frac{1}{1 + \beta^2 p^2}(1 - \alpha\beta p^2 + ip)\end{aligned}$$

である. 途中で $\alpha + \beta = 1$ であることを用いた. それぞれのスキームについて (α, β) を代入すると,

オイラースキームの場合 $\lambda = 1 + ip$

後退スキームの場合 $\lambda = \frac{1 + ip}{1 + p^2}$

台形スキームの場合 $\lambda = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}p^2} \left(1 - \frac{1}{4}p^2 + ip \right)$

となる. ここからは, それぞれのスキームについて $|\lambda|$ を調べる.

オイラースキーム

$$|\lambda| = \sqrt{\lambda\lambda^*} = \sqrt{1 + p^2} > 1.$$

よって, オイラースキームは振動方程式に対し不安定である. 但し, $p = \omega\Delta t \ll 1$ のとき,

$$\begin{aligned}|\lambda| &= 1 + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}p^4 + \dots \\ &= 1 + O(\Delta t^2) \\ &= 1 + O(\Delta t^2),\end{aligned}$$

¹⁾つまり p は 1 ステップあたりに進む位相.

となり、フォンノイマン法の安定性条件は満たしている。

後退スキーム

$$|\lambda| = \sqrt{\lambda\lambda^*} = \frac{1}{1+p^2} \sqrt{1+p^2} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} < 1$$

よって、後退スキームは Δt の大きさによらず安定である。但し、 ω が大きいほど減衰率も大きくなる。実際の問題では、 ω の大きい解 (高周波数解) は数値的に減衰させやすい。したがって、後退差分スキームのような振動数によって選択的に減衰させるスキームは、不要な高周波数解を除去するスキーム (フィルター) としても用いられる。

台形スキーム

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sqrt{\lambda\lambda^*} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{4}p^2} \sqrt{\left(1-\frac{1}{4}p^2\right)^2 + p^2} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{4}p^2} \sqrt{\left(1+\frac{1}{4}p^2\right)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

よって、台形スキームは中立である。以上より、陰的なスキームは Δt の大きさによらず安定である。

反復する1段階スキームの安定性

1段のスキーム, すなわち U^{n+1} をもとめるために関数 f を2回計算するスキームのことを, 以下では反復する1段階スキームと呼ぶことにする。前節と同様に, 反復する1段階スキームをまとめて表すと,

$$U^* = U^n + \Delta t f^n, \quad (2)$$

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t (\alpha f^n + \beta f^*), \quad (3)$$

$$\alpha + \beta = 1.$$

である。 α と β の与え方によって以下のように分類される。

$$\alpha = 0, \beta = 1 \quad \text{松野スキーム}$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \quad \text{ホインスキーム}$$

(2) 式に振動方程式をあてはめると $f^n = i\omega U^n$ なので,

$$U^* = U^n + i\omega\Delta t U^n. \quad (4)$$

また, (3) 式に振動方程式をあてはめ, (4) 式を代入すると,

$$\begin{aligned} U^{(n+1)} &= U^n + \Delta t(\alpha i\omega U^n + \beta i\omega U^{(n+1)*}) \\ &= U^n + i\omega\Delta t\{\alpha U^n + \beta(U^n + i\omega\Delta t U^n)\} \\ &= U^n + i\omega\Delta t\{(\alpha + \beta)U^n + i\omega\Delta t\beta U^n\} \\ &= U^n(1 + i\omega\Delta t - \omega^2\Delta t^2\beta) \end{aligned}$$

ここで再び $p \equiv \omega\Delta t$ とおき, 整理すると,

$$U^{n+1} = (1 - \beta p^2 + ip)U^n.$$

ゆえに, 増幅係数 λ は定義から,

$$\lambda = \frac{U^{n+1}}{U^n} = 1 - \beta p^2 + ip \quad (5)$$

である. それぞれのスキームについて β の値を代入すると,

松野スキームの場合 $\lambda = 1 - p^2 + ip$

ホインスキームの場合 $\lambda = 1 - \frac{1}{2}p^2 + ip$

となる. ここからは, それぞれのスキームについて $|\lambda|$ を調べる.

松野スキーム

松野スキームの場合 $\beta = 1$ であるから, 松野スキームの増幅係数は,

$$\lambda = 1 - p^2 + ip, \quad (6)$$

である. 先ほど述べたように, 安定性を調べるには $|\lambda|$ を求めればよかった. したがって,

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sqrt{\lambda\lambda^*} \\ &= \sqrt{(1 - p^2 + ip)(1 - p^2 - ip)} \\ &= \sqrt{(1 - p^2)^2 + p^2} \\ &= \sqrt{1 - p^2 + p^4}. \end{aligned} \quad (7)$$

安定となるのは $|\lambda| \leq 1$ のときである。これは $|p| \leq 1$ であれば満たされる。 $p = \omega\Delta t$ なので、

$$|\omega\Delta t| \leq 1.$$

さらに、 $\Delta t \geq 0$ なので、

$$\Delta t \leq \frac{1}{|\omega|}. \quad (8)$$

よって、(8) 式のと看安定する。

松野スキームの p に対する $|\lambda|$ の振る舞いを知るために、 $|\lambda|$ の極値を考える。(7) 式を p で微分して、

$$\begin{aligned} \frac{d|\lambda|}{dp} &= \frac{4p^3 - 2p}{2\sqrt{p^4 - p^2 + 1}} \\ &= \frac{2p^3 - p}{\sqrt{p^4 - p^2 + 1}} \end{aligned}$$

なので、 $|\lambda|$ は $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で極値になることがわかる。 $0 \leq p \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲では ω が大きいほど $|\lambda|$ が小さくなる。Matsuno (1966) では、多数の振動数をもつ系では $0 < p < \frac{1}{\sqrt{2}}$ となるように Δt を与える方がよいと指摘している。なぜなら、 $0 < p < \frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲では ω が大きいほど減衰率が大きいので、ノイズとなる可能性のある高周波成分をより早く減衰させることができるからである。

ホインスキーム

ホインスキームの増幅係数は、(5) 式において $\beta = \frac{1}{2}$ とすればよく、

$$\lambda = 1 + ip - \frac{1}{2}p^2 \quad (9)$$

である。松野スキームのと看と同様にして、安定性を調べるために $|\lambda|$ を求める。

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sqrt{\lambda\lambda^*} \\ &= \sqrt{(1 + ip - \frac{1}{2}p^2)(1 - ip - \frac{1}{2}p^2)} \\ &= \sqrt{(1 - \frac{1}{2}p^2)^2 + p^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{4}p^4}. \end{aligned} \quad (10)$$

(10) 式は $p > 0$ で常に 1 より大きくなるので, 振動方程式に対してホインスキームは不安定である. しかし, $p = \omega\Delta t \ll 1$ のとき $|\lambda|$ を $p = 0$ のまわりで展開すると,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{4}p^4\right)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{4}p^4 + O(p^8) \\ &= 1 + \frac{1}{8}p^4 + O(p^8) \\ &= 1 + O(\Delta t^4). \end{aligned}$$

となる. ゆえに,

$$|\lambda| = 1 + O(\Delta t^4) < 1 + O(\Delta t),$$

となり, フォンノイマンの安定性条件を満たす.

1 段階スキームの増幅係数の大きさに関する議論をまとめると次のようになる. ここで $p = \omega\Delta t$ である.

$$\begin{aligned} |\lambda_{\text{オイラー}}| &= \sqrt{1 + p^2}, \\ |\lambda_{\text{後退}}| &= \frac{1}{1 + p^2}, \\ |\lambda_{\text{台形}}| &= 1, \\ |\lambda_{\text{松野}}| &= \sqrt{1 - p^2 + p^4}, \\ |\lambda_{\text{ホイン}}| &= \sqrt{1 + \frac{1}{4}p^4}. \end{aligned}$$

それぞれのスキームの増幅係数の大きさを図 1 に図示する.

1 段階のスキームの位相

今, 振動方程式の $t = n\Delta t$ のときの解を

$$U(n\Delta t) = U(0)e^{i\omega n\Delta t}$$

とする. 数値解は増幅係数を λ とすると

$$\begin{aligned} U^n &= \lambda U^{n-1} \\ &= \lambda^n U^0 \end{aligned}$$

ここで, λ を極形式で書きなおすと

$$\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$$

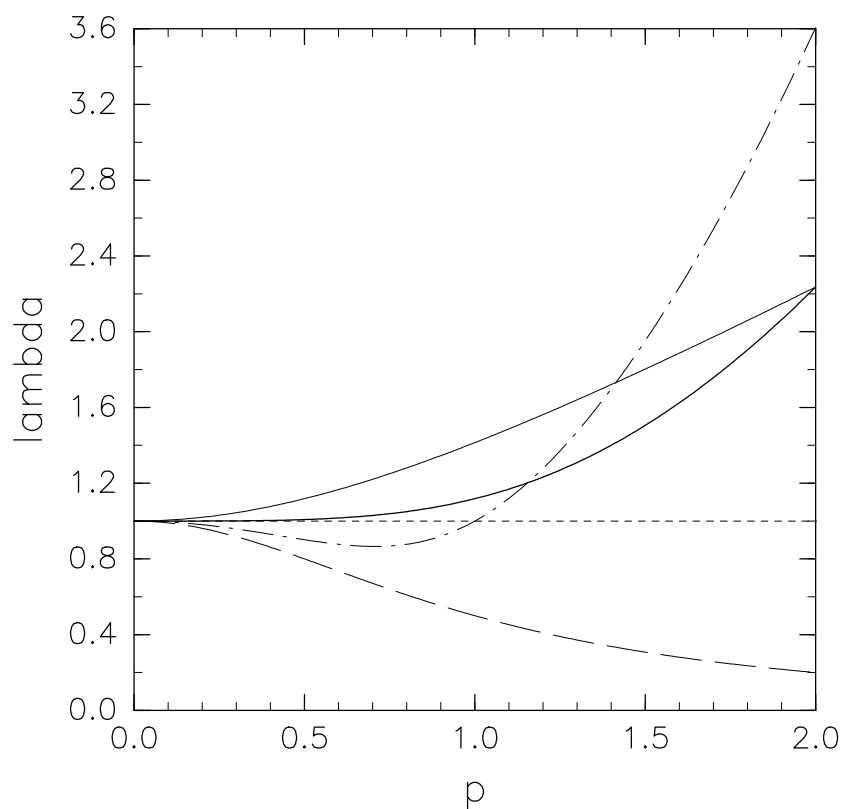


図 1: 5つの1段階スキームの増幅係数の振る舞い. 横軸は $p = \omega\Delta t$, 縦軸は $|\lambda|$ をとっている. 細実線はオイラスキーム, 破線は後退スキーム, 点線は台形スキーム, 一点鎖線は松野スキーム, 太実線はホインスキームをそれぞれ表している.

である. よって,

$$\begin{aligned} U^n &= \lambda^n U^0 \\ &= |\lambda|^n U^0 e^{in\theta} \end{aligned} \quad (11)$$

である. 真の解は $p = \omega\Delta t$ とすると,

$$U(n\Delta t) = U(0)e^{inp} \quad (12)$$

である. ここで (11) 式の λ を実部 λ_{re} と虚部 λ_{im} に書き直すと

$$U^n = (\lambda_{re} + i\lambda_{im})^n U^0. \quad (13)$$

また, $\lambda_{re} + i\lambda_{im} = |\lambda| e^{i\theta}$ より

$$\tan \theta = \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}.$$

よって,

$$\theta = \arctan \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}} \quad (14)$$

真の解の位相に対する数値解の位相の比は

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}. \quad (15)$$

オイラースキーム

オイラースキームは $\lambda = 1 + ip$ なので (15) 式は

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{p} &= \frac{1}{p} \arctan p \\ &= \frac{1}{p} \cdot \left(p - \frac{1}{3}p^3 + \frac{1}{5}p^5 \cdots \right) \end{aligned}$$

$p \ll 1$ とすると

$$\frac{\theta}{p} \approx 1 - \frac{1}{3}p^2 < 1$$

よって, 数値解の位相は真の解に比べて遅く進む²⁾.

²⁾ $\arctan x$ のマクローリン展開を求める.

まず $\frac{1}{1-r}$ を求める. $|r| < 1$ のとき $r = 0$ の周りで展開すると

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

このとき $r = -t^2$ ($|t| < 1$) とすると

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$$

これを $|x| < 1$ である x に対して 0 から x まで積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} &= \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots) dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \end{aligned} \tag{a.1}$$

ここで $y = \arctan x$ の x 微分を考える. $y = \arctan x$ の定義より

$$\tan y = x$$

両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d \tan y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \cos^2 y \end{aligned}$$

ここで $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$ なので

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos^2 y \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 y} \\ &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

よって, $|x| < 1$ のときに

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt. \tag{a.2}$$

(a.1) 式と (a.2) 式から

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

参考:竹野 茂治, 2009, 「勾配から角度を求める展開式」

後退スキーム

後退スキームは $\lambda = \frac{(1+ip)}{1+p^2}$ なので

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{p} &= \frac{1}{p} \arctan \frac{\frac{p}{1+p^2}}{\frac{1}{1+p^2}} \\ &= \frac{1}{p} \arctan p\end{aligned}$$

となりオイラスキームと同様に数値解の位相は真の解に比べて遅く進む。

台形スキーム

台形スキームは $\lambda = \frac{1}{1+p^2} \left(1 - \frac{1}{4}p^2 + ip\right)$ なので

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - \frac{1}{4}p^2}.$$

$p \ll 1$ のとき $p = 0$ の周りで展開すると

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{p} &= \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - \frac{1}{4}p^2} \\ &= \frac{1}{p} \arctan \left\{ p \left(1 + \frac{p^2}{4} + \frac{p^4}{16} + \dots \right) \right\} \\ &= \frac{1}{p} \left\{ \left(p + \frac{p^3}{4} + \frac{p^5}{16} + \dots \right) - \frac{\left(p + \frac{p^3}{4} + \frac{p^5}{16} + \dots \right)^3}{3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(p + \frac{p^3}{4} + \frac{p^5}{16} + \dots \right)^5}{5} - \dots \right\}.\end{aligned}\tag{17}$$

ここで $\frac{p}{1 - \frac{1}{4}p^2}$ の括弧内の三次以上の寄与を無視すると (17) 式は

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{p} &\approx \frac{1}{p} \left(p - \frac{p^3}{3} + \frac{p^5}{5} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{p} \arctan p < 1.\end{aligned}$$

また, 括弧内の三次までの寄与を考慮すると

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{p} &\approx \frac{1}{p} \left(p + \frac{p^3}{4} - \frac{\left(p + \frac{p^3}{4}\right)^3}{3} + \frac{\left(p + \frac{p^3}{4}\right)^5}{5} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(p + \frac{p^3}{4} - \frac{\left(p^3 + \frac{3p^5}{4} + \frac{3p^7}{16} + \frac{p^9}{64}\right)}{3} + O(p^5) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{12}p^2 + O(p^4) < 1.\end{aligned}$$

よって, 数値解の移送は真の解に比べて遅く進む.

松野スキーム

松野スキームは $\lambda = 1 - p^2 + ip$ なので

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - p^2}.$$

となる. 台形スキームのときと同様に $p \ll 1$ のとき $p = 0$ の周りで展開すると

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{p} &= \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - p^2} \\ &= \frac{1}{p} \arctan \left\{ p(1 + p^2 + p^4 + \dots) \right\} \\ &= \frac{1}{p} \left\{ (p + p^3 + p^5 + \dots) - \frac{(p + p^3 + p^5 + \dots)^3}{3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p + p^3 + p^5 + \dots)^5}{5} - \dots \right\}.\end{aligned}\tag{18}$$

ここで $\frac{p}{1 - \frac{1}{4}p^2}$ の三次以上の寄与を無視すると (18) 式は

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{p} &\approx \frac{1}{p} \left(p - \frac{p^3}{3} + \frac{p^5}{5} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{p} \arctan p < 1.\end{aligned}$$

また、三次までの寄与を考慮すると

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{p} &\approx \frac{1}{p} \left(p + p^3 - \frac{(p+p^3)^3}{3} + \frac{(p+p^3)^5}{5} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(p + p^3 - \frac{(p^3 + 3p^5 + 3p^7 + p^9)}{3} + O(p^4) \right) \\ &= 1 + \frac{2}{3}p^2 + O(p^3) > 1.\end{aligned}$$

よって、 p が 0 の極近傍ではオイラスキームと同様に数値解の位相は真の解に比べて遅く進み、そこから離れていくと早く進む。

ホインスキーム

ホインスキームは $\lambda = 1 - \frac{1}{2}p^2 + ip$ なので

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - \frac{1}{2}p^2}.$$

台形スキームと同様にやる。 $p \ll 1$ のとき $p = 0$ の周りで展開すると

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{p} &= \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - \frac{1}{2}p^2} \\ &= \frac{1}{p} \arctan \left\{ p \left(1 + \frac{p^2}{2} + \frac{p^4}{4} + \dots \right) \right\} \\ &= \frac{1}{p} \left\{ \left(p + \frac{p^3}{2} + \frac{p^5}{4} + \dots \right) - \frac{\left(p + \frac{p^3}{2} + \frac{p^5}{4} + \dots \right)^3}{3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(p + \frac{p^3}{2} + \frac{p^5}{4} + \dots \right)^5}{5} - \dots \right\}.\end{aligned}\tag{19}$$

ここで $\frac{p}{1 - \frac{1}{2}p^2}$ の括弧内の三次以上の寄与を無視すると (19) 式は

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{p} &\approx \frac{1}{p} \left(p - \frac{p^3}{3} + \frac{p^5}{5} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{p} \arctan p < 1.\end{aligned}$$

また、括弧内の三次までの寄与を考慮すると

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{p} &\approx \frac{1}{p} \left(p + \frac{p^3}{2} - \frac{\left(p + \frac{p^3}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(p + \frac{p^3}{2}\right)^5}{5} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(p + \frac{p^3}{2} - \frac{\left(p^3 + \frac{3p^5}{2} + \frac{3p^7}{4} + \frac{p^9}{8}\right)}{3} + O(p^5) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{6}p^2 + O(p^4) > 1.\end{aligned}$$

よって、松野スキームと同様で、 p が 0 の極近傍では遅く進み、そこから離れると早く進む。

2 段階スキームの安定性

U^{n+1} を求めるのに U^n, U^{n-1} を用いて求める 2 段階スキームの安定性を求める。

リープフロッグスキーム (leapfrog scheme)

振動方程式に対してリープフロッグスキームをあてはめた差分式は

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2i\omega\Delta t U^n. \quad (20)$$

2 段階スキームを用いた場合初期値が U^0, U^1 の 2 つ必要になる。ここで U^0 は物理的な初期値、 U^1 は U^0 から何らかの方法で計算し求めた初期値である。

増幅係数 λ を計算すると

$$U^n = \lambda U^{n-1}.$$

$$U^n = \frac{U^{n+1}}{\lambda} \text{ なので}$$

$$\begin{aligned}\frac{U^{n+1}}{\lambda} &= \lambda U^{n-1}, \\ U^{n+1} &= \lambda^2 U^{n-1}.\end{aligned}$$

これを (20) 式に代入すると

$$\lambda^2 U^{(n-1)} = U^{(n-1)} + 2i\omega\Delta t \lambda U^{(n-1)}.$$

両辺を $U^{(n-1)}$ で割ると

$$\lambda^2 - 2i\omega\Delta t\lambda - 1 = 0.$$

これを解くと

$$\lambda = ip \pm \sqrt{1 - p^2}. \quad (21)$$

よって、 λ の解は2つ存在する. 一般に m 段階スキームには m 個の増幅係数が現れる. それぞれの λ に対する数値解をモード (mode) と呼ぶ.

リープフログスキームの場合 (21) 式は,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{1 - p^2} + ip, \\ \lambda_2 &= -\sqrt{1 - p^2} + ip \end{aligned}$$

の2つの解になる. それぞれの $|\lambda|$ を考えると,

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= (\sqrt{1 - p^2} + ip)(\sqrt{1 - p^2} - ip) \\ &= 1, \\ |\lambda_2| &= (-\sqrt{1 - p^2} + ip)(-\sqrt{1 - p^2} - ip) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる. よって、リープフログスキームの二つの増幅係数はどちらも安定である. また、真の解と数値解の位相比を考える. (15) 式より λ_1 の場合は

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{p} &= \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{(1 - p^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{p} \arctan \left\{ p \left(1 + \frac{p^2}{2} + \frac{p^4}{4} + \dots \right) \right\}. \end{aligned}$$

よって、ホインスキームと同じ形になるので p が0の極近傍では遅く進む, そこから離れると早く進む. また、 λ_2 の場合は

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{p} &= \frac{1}{p} \arctan -\frac{p}{(1 - p^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{p} \arctan \left\{ -p \left(1 + \frac{p^2}{2} + \frac{p^4}{4} + \dots \right) \right\}. \end{aligned}$$

よって、真の解よりも遅く進む.

物理モードと計算モード

リープフログスキームの増幅係数は (21) 式より

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{1 - p^2} + ip, \\ \lambda_2 &= -\sqrt{1 - p^2} + ip \end{aligned}$$

の2つの解である。ここで $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を考えると λ_1 のときは $\lambda_1 \rightarrow 1$ で $U^{n+1} = U^n$, λ_2 のときは $\lambda_2 \rightarrow -1$ で $U^{n+1} = -U^n$ となり, λ_2 のときには反転してしまう。そこで λ_1 に対応する数値解を物理モード (physical modes), λ_2 に対応する数値解を計算モード (computational modes) と呼ぶことにする。実際の計算で得られる数値解は, これらのモードの重ね合わせになる。

重ね合わせを考える前に極端な例として $\omega = 0$ の場合を考える。そのとき

$$\frac{dU}{dt} = 0.$$

(20) 式は

$$U^{n+1} = U^{n-1}$$

となる。これは U^1 の与え方によって解の振舞いが変わる。

U^1 が $U^1 = U^0$ と与えられた場合

$$U^{n+1} = U^n.$$

これは $p \rightarrow 0$ の極限の λ_1 のモードに対応するので

$$U^{n+1} = \lambda_1 U^n.$$

この場合, 解は物理モードのみから構成される。

U^1 が $U^1 = -U^0$ として与えられた場合

$$U^{n+1} = -U^n.$$

これは $p \rightarrow 0$ の極限での λ_2 のモードに対応するので

$$U^{n+1} = \lambda_2 U^n.$$

この解は計算モードのみから構成される。

次に $\omega \neq 0$ の一般の場合を考える。その場合

$$\begin{aligned} U_1^n &= \lambda_1^n U_1^0, \\ U_2^n &= \lambda_2^n U_2^0 \end{aligned}$$

の重ね合わせで表される。よって, a, b を定数とすると

$$U^n = a\lambda_1^n U_1^0 + b\lambda_2^n U_2^0. \quad (22)$$

U^0 と U^1 を (22) 式を用いて表すと

$$U^0 = aU_1^0 + bU_2^0, \quad (23)$$

$$U^1 = a\lambda_1 U_1^0 + b\lambda_2 U_2^0. \quad (24)$$

これを $aU_1^{(0)}$ と $bU_2^{(0)}$ の連立方程式と考えて解くと

$$aU_1^0 = \frac{\lambda_2 U^0 - U^1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

$$bU_2^0 = \frac{\lambda_1 U^0 - U^1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

これを (22) 式に代入すると

$$\begin{aligned} U^n &= \lambda_1^n \frac{\lambda_2 U^0 - U^1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \lambda_2^n \frac{\lambda_1 U^0 - U^1}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [\lambda_1^n (U^1 - \lambda_2 U^0) - \lambda_2^n (U^1 - \lambda_1 U^0)]. \end{aligned} \quad (25)$$

よって、物理モードの振幅は $|U^1 - \lambda_2 U^0|$ に計算モードの振幅は $|U^1 - \lambda_1 U^0|$ に比例することが分かる。(25) 式は $U^1 = \lambda_1 U^0$ のとき

$$\begin{aligned} U^n &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^n (\lambda_1 - \lambda_2) U^0 \\ &= \lambda_1^n U^0. \end{aligned}$$

一方、 $U^1 = \lambda_2 U^0$ のとき

$$\begin{aligned} U^n &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2^n (\lambda_1 - \lambda_2) U^0 \\ &= \lambda_2^n U^0. \end{aligned}$$

となり、どちらも $\omega = 0$ の場合に対応する。

U^1 は λ_1 から求めることができるが計算モードを必ず除去できるわけではない。また複雑な式になると解析的に物理モードを求めることができなくなる。よって U^1 は 1 段階スキームから求める。しかし、もし物理モードが厳密に分かったとしても U^n が差分式の厳密解にならない。これは計算機によって丸め誤差があるためである。

参考文献

川畑 拓哉, 2011, 「時間差分スキーム (1)」

URL:http://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/~gfdlab/comptech/resume/0728/2011_0728-takuya.pdf

Mesinger, F., and Arakawa, A., 1976, Numerical methods used in atmospheric models, GARP Publications series (World Meteorological Organization), No. 17, Part 1., 64 pp

石岡 圭一, 2004, 「スペクトル法による数値計算入門」, 東京大学出版会, ISBN:4130613057

竹野 茂治, 2009, 「勾配から角度を求める展開式」

URL:<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/data/arctan1.pdf>