# 時間差分スキーム(3)

## リープフロッグスキームの安定性と位相

リープフロッグスキームの場合, 2 つの増幅係数 $\lambda_1$ と $\lambda_2$ が存在する. 時間差分スキーム (2) の (22) 式より振動方程式にリープフロッグスキームを当てはめた差分式は,

$$U^n = a\lambda_1^n U_1^0 + b\lambda_2^n U_2^0.$$

したがって, 安定性条件は,

$$|\lambda_1| < 1,$$
$$|\lambda_2| < 1$$

であることである. 以下では安定性条件を詳しくみるために, 3 つの特別な場合について考える.

**Case1.** $|p| < 1$ **のとき**

時間差分スキーム (2) の三段階スキームの安定性より,$1 - p^2 > 0$ のときは

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= \sqrt{\lambda_1 \lambda_1^*} = 1, \\ |\lambda_2| &= \sqrt{\lambda_2 \lambda_2^*} = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

よって, $|p| < 1$ のとき, 安定性は中立となる. 位相については,

$$\theta = \arctan\left(\frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}\right)$$

より,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right), \\ \theta_2 &= \arctan\left(-\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

$p \to 0$ の時の位相の振る舞いについて考える. 右極限 $p \to +0$ を考えると

$$\tan\theta_1 = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} > 0,$$
$$\tan\theta_2 = -\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} < 0.$$

ゆえに,

$$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2},$$
$$\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \pi.$$

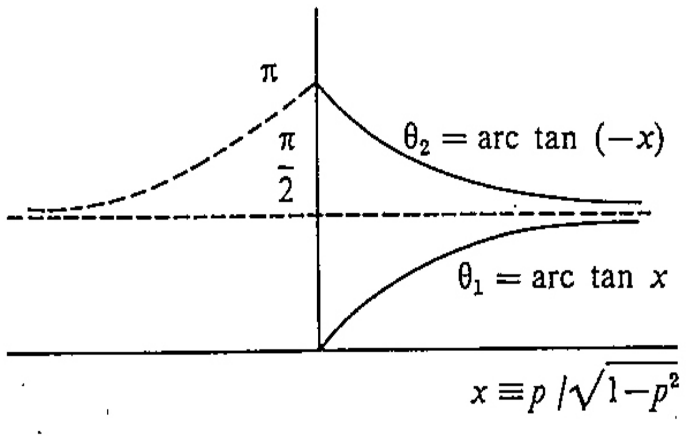


図 1: リープフロッグスキームにおける物理モードと計算モードの位相の振る舞い (Mesinger and Arakawa (1976) より引用).

図 1 より,

$$\theta_2 = \pi - \theta_1.$$

特に, $p \to 0$ のとき, $\theta_1 \to p$ , $\theta_2 \to \pi - p$ である. $p = \omega\Delta t$ であるから, $\Delta t \to 0$ のとき物理モードの位相は真の解の位相に近づくことがわかる. 一方, 計算モードの位相は $\pi$ ずれてしまう. 同様に $p < 0$ で左極限 $p \to -0$ を考えると,

$$-\pi < \theta_1 < -\frac{\pi}{2},$$
$$-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < 0$$

であるから,

$$\theta_2 = -\pi - \theta_1.$$

結局, $p \gtrless 0$ をまとめて表すと,

$$\theta_2 = \pm\pi - \theta_1 \qquad \text{(複号同順)} \tag{3}$$

となる.

物理モードの位相 $\theta_1$ の振る舞いは次の通りである. $p \ll 1$ のとき,

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right)$$

なので,

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right)\\ &\sim \arctan\left\{p(1+\frac{1}{2!}p^2 - 9\frac{1}{4!}p^4 + \cdots)\right\}\\ &\sim (p+\frac{1}{2}p^3) - \frac{(p+\frac{1}{2}p^3)^3}{3} + \cdots\\ &\sim p + \frac{p^3}{6} + \cdots .\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\frac{\theta_1}{p} = 1 + \frac{p^2}{6} > 1.$$

リープフロッグスキームの物理モードの位相は真の解よりも早く進む. 但し, 松野スキームよりは遅い.

次に, $\theta_1$ の微分を考える[1].

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta_1}{dp} &= \left( \frac{1}{1+\left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right)^2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} + \frac{p^2}{\sqrt{1-p^2}(1-p^2)} \right) \\
&= (1-p^2)\left( \frac{1}{\sqrt{1-p^2}(1-p^2)} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}.
\end{aligned}$$

$\frac{d\theta_1}{dp} > 0$ , $p \to 1$ のとき, $\theta_1 \to \frac{\pi}{2}$. さらに $p \gtrless 0$ のとき $\theta_2 = \pm\pi - \theta_1$. したがって,

$$\begin{aligned}
U_1^n &= U_1^0 e^{in\theta_1}, \\
U_2^n &= U_2^0 e^{in(\pm\pi-\theta_1)}.
\end{aligned} \tag{4}$$

簡単のために $\theta_1 = \frac{\pi}{8}$ の場合を考える. さらに, 初期において $Im(U_1^0) = 0, Im(U_2^0) = 0$ とする. このとき, 物理モード $U_1^n$ の位相は反時計回りに $\frac{\pi}{8}$ ずつずれる. 計算モード ($p > 0$) の位相は $\theta_2 = \pi - \theta_1$ より時計回りに進む. これらを実部と虚部に分けると, $U_1$ は

$$U_1^n = U_1^0(\cos n\theta_1 - i\sin n\theta_1).$$

よって,

$$\begin{aligned}
Re[U_1^n] &= U_1^0 \cos n\theta_1, \\
Im[U_1^n] &= U_1^0 \sin n\theta_1.
\end{aligned}$$

$U_2$ は

$$\begin{aligned}
U_2^n &= U_2^0 e^{in(\pi-\theta_1)} \\
&= U_2^0 e^{in\pi} e^{-in\theta_1} \\
&= (-1)^n U_2^0(\cos n\theta_1 - i\sin n\theta_1).
\end{aligned}$$

[1] $\arctan x$ の微分を考える. $y = \arctan x$ とすると, $x = \tan y$ と書きかえることができる. よって,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} \\
&= \frac{1}{1+\tan^2 y} \\
&= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

時間差分スキーム (3)


よって,

$$Re[U_2^n] = (-1)^n U_2^0 \cos n\theta_1,$$
$$Im[U_2^n] = (-1)^{n+1} U_2^0 \sin n\theta_1.$$

これらを図示すると図 2 の様になる.

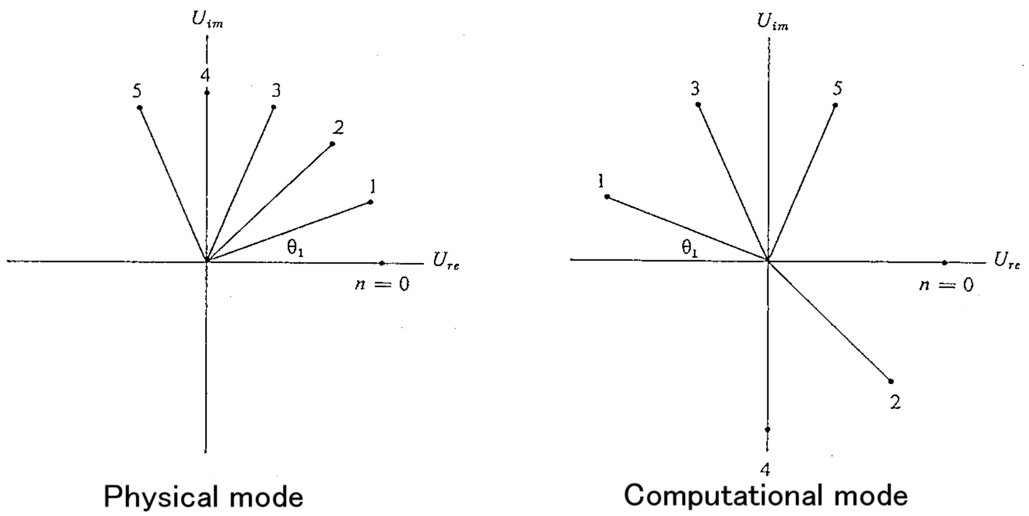


図 2: 物理モードと計算モード.$U_1$ の方は $n$ が増えると反時計回りに動いていく. $U_2$ の方は $+$ と $-$ が交互に入れ替わってしまう.

**Case2.** $|p| = 1$ **のとき**

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ip$$

なので,

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1. \tag{5}$$

ゆえに, この場合, 物理モードも計算モードもともに安定性は中立である. $\theta_1$ の位相は,

$$\theta = \arctan\left(\frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}\right),$$
$$\tan\theta_1 = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \to \infty \quad (|p| \to 1).$$

同様に $\theta_2$ の位相は,

$$\tan\theta_2 = -\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \to \infty \quad (|p| \to 1).$$

よって,

$$\theta_1 = \theta_2 = \pm\frac{\pi}{2} \qquad (p = \pm 1). \tag{6}$$

このとき解はどちらのモードも,

$$U^n = U^0 e^{\pm in\frac{\pi}{2}} \tag{7}$$

となる.

**Case3.** $|p| > 1$ **のとき**

$$\lambda_1 = i(p + \sqrt{p^2-1}),$$
$$\lambda_2 = i(p - \sqrt{p^2-1}).$$

括弧の中身が実数であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= |p + \sqrt{p^2-1}|, \\ |\lambda_2| &= |p - \sqrt{p^2-1}| \end{aligned} \tag{8}$$

である. したがって,

$$|\lambda_1| > 1 \qquad (p > 1),$$
$$|\lambda_2| > 1 \qquad (p < -1).$$

ゆえに, 安定性は不安定である. $|p|$ が 1 を越えると, 急激に不安定になる. 例えば, $p > 1$ のとき,

$$\frac{d\lambda_1}{dp} = 1 + \frac{p}{\sqrt{p^2 - 1}}.$$

よって, $p \to +1$ のとき発散する. 位相は Case2 のときと同様にして,

$$\theta_1 = \theta_2 = \pm\frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

解は,

$$\begin{aligned} U_1^n &= |p + \sqrt{p^2 - 1}|^n U_1^0 e^{\pm in\frac{\pi}{2}}, \\ U_2^n &= |p - \sqrt{p^2 - 1}|^n U_2^0 e^{\pm in\frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \tag{10}$$

位相の進み方は Case2 と同じだが, 振幅は時間とともに増加することがわかる.

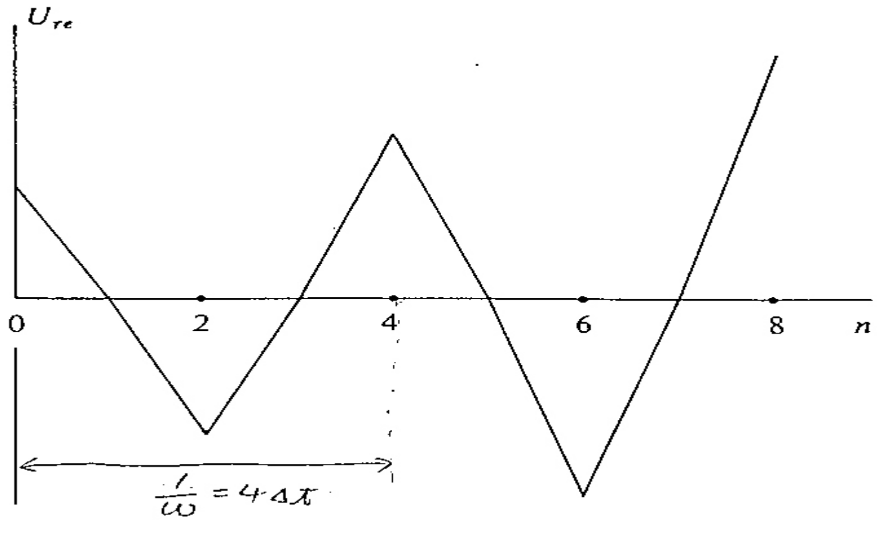


図 3: リープフロッグスキームにおける不安定モードの実部と時間の関係. $|\lambda| = 1.1$ とし, 初期時刻において虚部をゼロとしている.

図 3 より, 不安定なモードの周期は $4\Delta t$ である.

## まとめ

リープフロッグスキームの利点は 2 次精度であることと, $|\omega\Delta t| \leqslant 1$ のときに安定であることである. 一方, 欠点は計算モードの安定性が中立であることと, 非線形方程式の場合に計算モードの増加する場合があることである. なお, 計算モードを排除するには, 途中で 2 段階スキームを差し込むとよい.

## アダムス-バッシュフォース (Adams-Bashforth) スキームの安定性と位相

時間差分スキーム (1) のアダムス-バッシュフォーススキームにおいて, $f = i\omega U$ と置いたとき,

$$
\begin{aligned}
U^{n+1} &= U^n + \Delta t \left( \frac{3}{2} f^n - \frac{1}{2} f^{n-1} \right) \\
&= U^n + i\omega\Delta t \left( \frac{3}{2} U^n - \frac{1}{2} U^{n-1} \right). \qquad (11)
\end{aligned}
$$

このとき増幅係数 $\lambda$ は,

$$
\begin{aligned}
U^n &= \lambda U^{n-1}, \\
U^{n+1} &= \lambda U^n = \lambda^2 U^{n-1}
\end{aligned}
$$

を (11) 式に代入して,

$$
\lambda^2 - \left( 1 + i\frac{3}{2} p \right) \lambda + i\frac{1}{2} p = 0.
$$

但し, $p \equiv \omega\Delta t$ である. ゆえに, アダムス-バッシュフォーススキームもリープフロッグスキームと同様に 2 つの $\lambda$ をもつ. 上式を $\lambda$ について解くと,

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[ 1 + i\frac{3}{2} + \sqrt{1 - \frac{9}{4} p^2 + ip} \right], \\
\lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[ 1 + i\frac{3}{2} - \sqrt{1 - \frac{9}{4} p^2 + ip} \right].
\end{aligned} \qquad (12)
$$

$p \to 0$ のとき, $\mathrm{Rm}\lambda_1 \to 1$, $\mathrm{Rm}\lambda_2 \to 0$ である. したがって, $\lambda_1$ に対応するモードが物理モード, $\lambda_2$ に対応するモードが計算モードである. $p$ が十分小さいとき, 計算モードは減衰する. これはアダムス-バッシュフォーススキームの利点である. そこで, $|p| < 1$ のときの $\lambda_1$ と $\lambda_2$ の振る舞いを調べる. (12) 式の根号の部分をテイラー展開し, 地道に計算すると,

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 + i\frac{3}{2} + \frac{1}{4} ip - \frac{1}{2} p^2 + i\frac{1}{32} p^3 - \frac{1}{16} p^4 + \cdots, \\
\lambda_2 &= i\frac{3}{2} - \frac{1}{4} ip + \frac{1}{2} p^2 - i\frac{1}{32} p^3 + \frac{1}{16} p^4 - \cdots.
\end{aligned}
$$

実部と虚部に分けて表すと,

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \left( 1 - \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{16} p^4 - \cdots \right) + i \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{4} p + \frac{1}{32} p^3 + \cdots \right), \\
\lambda_2 &= \left( \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{16} p^4 + \cdots \right) + i \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{4} p - \frac{1}{32} p^3 - \cdots \right)
\end{aligned}
$$

となるので,

$$
\begin{aligned}
|\lambda_1| &= \sqrt{\lambda_1\lambda_1^*} \\
&= \left(1 + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}p + \cdots\right)^{\frac{1}{2}}, \\
|\lambda_2| &= \sqrt{\lambda_2\lambda_2^*} \\
&= \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{4}p + \cdots\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

さらにテイラー展開すると最終的に,

$$
\begin{aligned}
|\lambda_1| &= \frac{13}{4} + \frac{39}{32}p + \cdots, \\
|\lambda_2| &= \frac{9}{4} - \frac{27}{32}p + \cdots
\end{aligned} \tag{14}
$$

を得る. $|\lambda_1|$ も $|\lambda_2|$ もともに 1 より大きいので, アダムス-バッシュフォーススキームの物理モードは不安定である. しかし, 4 段階数のアダムス-バッシュフォーススキームなら物理モードは安定であることも知られている.

# 参考文献

川畑 拓哉, 2011,「時間差分スキーム (1)」
URL:http://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/~gfdlab/comptech/resume/0728/2011_0728-takuya.pdf

Mesinger, F., and Arakawa, A., 1976, Numerical methods used in atmospheric models, GARP Publications series (World Meteorological Organization), No. 17, Part 1., 64 pp

石岡 圭一, 2004,「スペクトル法による数値計算入門」, 東京大学出版会, ISBN:4130613057

竹野 茂治, 2009,「勾配から角度を求める展開式」
URL:http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/data/arctan1.pdf

KIT 数学ナビゲーション, 2007,「微分 arctanx」
URL:http://w3e.kanazawa-it.ac.jp/math/category/bibun/keisan/henkan-tex.cgi?target=/math/category
arctan.html