

Runge - Kutta 型公式の計算例

本レジュメでは、「ホインの3次公式」と「古典的 Runge - Kutta 公式」¹⁾の2つのスキームを取り上げ、振動方程式を例にそれぞれのスキームの振る舞いを考察する。

振動方程式は次式のように表される。

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U. \quad (1)$$

ただし、初期値を

$$U(0) = 1 \quad (2)$$

とし、 $\omega = \pi$ とする。計算時間は $0 \leq t \leq 10$ である。なお、この条件で式 (1) の解析解を描画すると、図1のようになる。

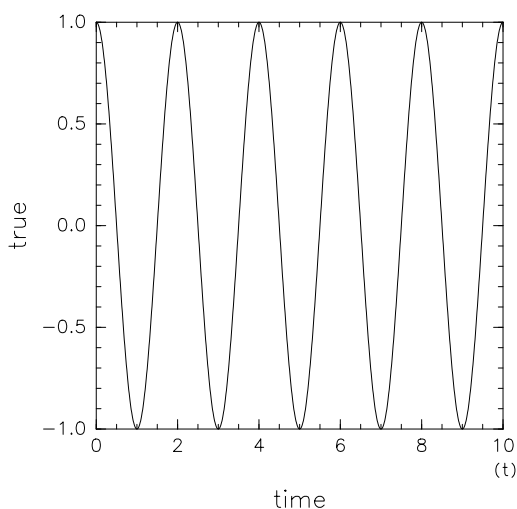


図 1: (1) の解析解. $\omega = \pi, U(0) = 1$ であり, $0 \leq t \leq 10$ とした.

¹⁾それぞれの公式の詳細は「時間差分スキーム (5)」を参照のこと.

ホインの 3 次公式

ホインの 3 次公式は「時間差分スキーム (5)」の式 (9) で与えられる。「時間差分スキーム (5)」の式 (9) を式 (1) に当てはめ、実部と虚部に分けて書き下すと、

$$\begin{aligned}
 k_{1r} &= -\Delta t \omega U_i^n, \\
 k_{1i} &= \Delta t \omega U_r^n, \\
 k_{2r} &= -\Delta t \omega \left(U_i^n + \frac{1}{3} k_{1i} \right), \\
 k_{2i} &= \Delta t \omega \left(U_r^n + \frac{1}{3} k_{1r} \right), \\
 k_{3r} &= -\Delta t \omega \left(U_i^n + \frac{2}{3} k_{2i} \right), \\
 k_{3i} &= \Delta t \omega \left(U_r^n + \frac{2}{3} k_{2r} \right), \\
 U_r^{n+1} &= U_r^n + \frac{1}{4} (k_{1r} + 3k_{3r}), \\
 U_i^{n+1} &= U_i^n + \frac{1}{4} (k_{1i} + 3k_{3i})
 \end{aligned} \tag{3}$$

となる。ここで、下つき添字の r, i はそれぞれ実部と虚部を表している。 Δt は時間間隔である。

$\Delta t = 0.01$ とし、実際に計算した結果を図 2 に示す。各時刻における解析解と数値解の差の絶対値、すなわち絶対誤差を図示したものが図 3 である。

荻原 (2010) によれば、ホインの 3 次公式の増幅率 λ は、

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{1}{36} (\omega \Delta t)^6 - \frac{1}{12} (\omega \Delta t)^4} \tag{4}$$

である。いま、 $\omega = \pi$ なので $\lambda \leq 1$ となるためには、 Δt を $-\sqrt{3}/\pi \leq \Delta t \leq \sqrt{3}/\pi$ の範囲でとる必要がある²⁾。

例えば、 $0 \leq t \leq 4$ の範囲で、 $\Delta t = 0.5$ とした場合 (図 4) と $\Delta t = 0.6$ とした場合 (図 5) を比べると、増幅の度合いをみてとることができる。

²⁾ $\sqrt{3}/\pi$ の値は、およそ 0.55 である。

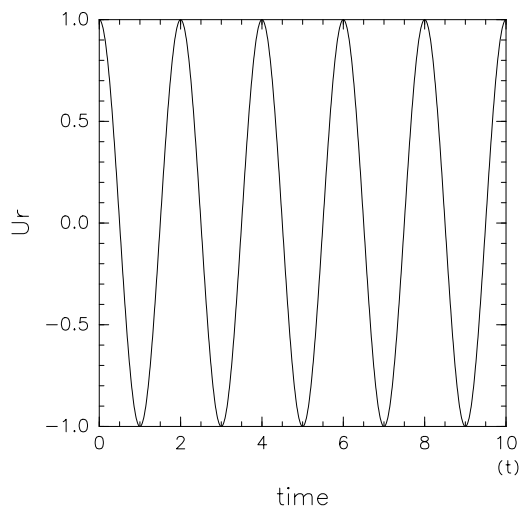


図 2: ホインの 3 次公式を用いて解いた式 (1) の数値解. $\omega = \pi, U(0) = 1, \Delta t = 0.01, 0 \leq t \leq 10$ である.

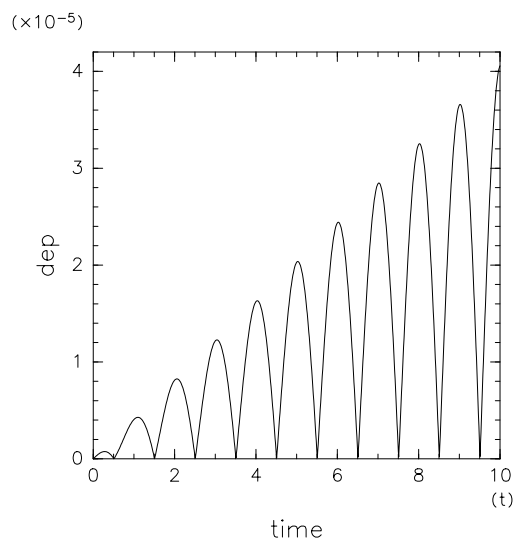


図 3: ホインの 3 次公式を用いて式 (1) を解いた場合の絶対誤差.

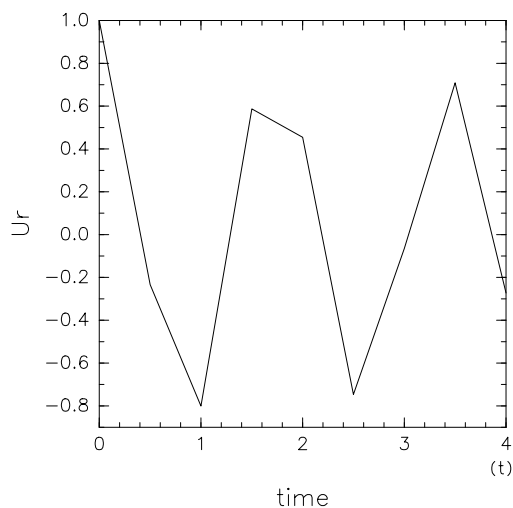


図 4: ホインの 3 次公式において, $\Delta t = 0.5$ として式 (1) を解いた場合. ただし, $0 \leq t \leq 4$ である.

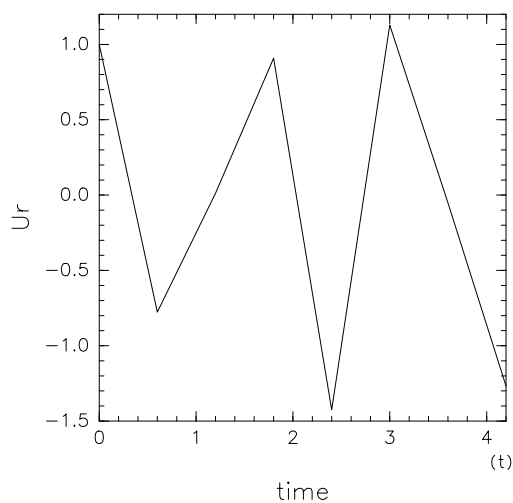


図 5: ホインの 3 次公式において, $\Delta t = 0.6$ として式 (1) を解いた場合. ただし, $0 \leq t \leq 4$ である.

古典的 Runge - Kutta 公式

古典的 Runge - Kutta 公式は「時間差分スキーム (5)」の式 (11) で与えられる。「時間差分スキーム (5)」の式 (11) を式 (1) に当てはめ、実部と虚部に分けて書き下すと、

$$\begin{aligned}
 k_{1r} &= -\Delta t \omega U_i^n, \\
 k_{1i} &= \Delta t \omega U_r^n, \\
 k_{2r} &= -\Delta t \omega \left(U_i^n + \frac{1}{2} k_{1i} \right), \\
 k_{2i} &= \Delta t \omega \left(U_r^n + \frac{1}{2} k_{1r} \right), \\
 k_{3r} &= -\Delta t \omega \left(U_i^n + \frac{1}{2} k_{2i} \right), \\
 k_{3i} &= \Delta t \omega \left(U_r^n + \frac{1}{2} k_{2r} \right), \\
 k_{4r} &= -\Delta t \omega (U_i^n + k_{3i}), \\
 k_{4i} &= \Delta t \omega (U_r^n + k_{3r}), \\
 U_r^{n+1} &= U_r^n + \frac{1}{6} (k_{1r} + 2k_{2r} + 2k_{3r} + k_{4r}), \\
 U_i^{n+1} &= U_i^n + \frac{1}{6} (k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i})
 \end{aligned} \tag{5}$$

となる。 $\Delta t = 0.01$ とし、実際に計算した結果を図 6 に示す。各時刻における絶対誤差を図示したものが図 7 である。

荻原 (2010) によれば、古典的 Runge - Kutta 公式の増幅率 λ は、

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{1}{576} (\omega \Delta t)^8 - \frac{1}{72} (\omega \Delta t)^6} \tag{6}$$

である。いま、 $\omega = \pi$ であるから、 $\lambda \leq 1$ となるためには Δt を $-2\sqrt{2}/\pi \leq \Delta t \leq 2\sqrt{2}/\pi$ でとる必要がある³⁾。

例えば、 $0 \leq t \leq 4$ の範囲で、 $\Delta t = 0.9$ とした場合 (図 8) と $\Delta t = 1.0$ とした場合 (図 9) を比べると、増幅の度合いを見てとることができる。

³⁾ $2\sqrt{2}/\pi$ の値はおよそ 0.90 である。

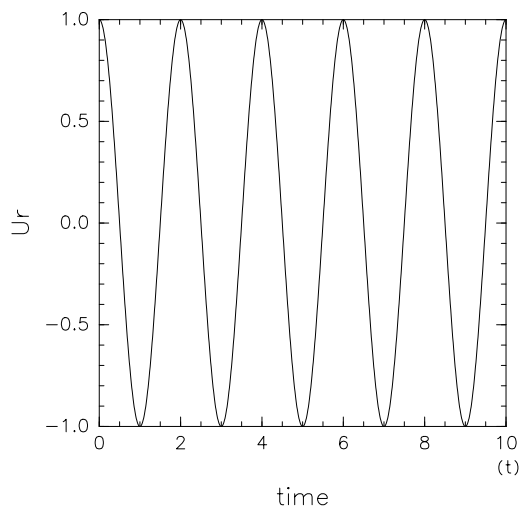


図 6: 古典的 Runge - Kutta 公式を用いて解いた式 (1) の解. $\omega = \pi, U(0) = 1, \Delta t = 0.01, 0 \leq t \leq 10$ である.

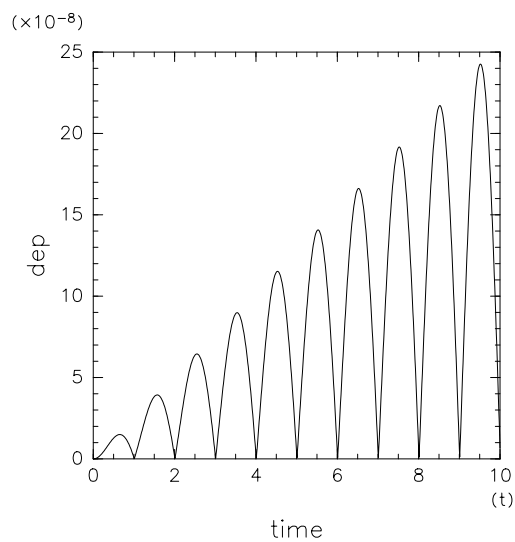


図 7: 古典的 Runge - Kutta 公式を用いて式 (1) を解いた場合の絶対誤差.

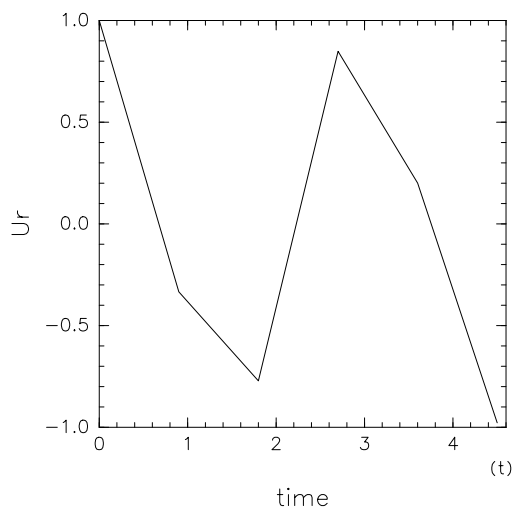


図 8: 古典的 Runge - Kutta 公式において, $\Delta t = 0.9$ として式 (1) を解いた場合. ただし $0 \leq t \leq 4$ である.

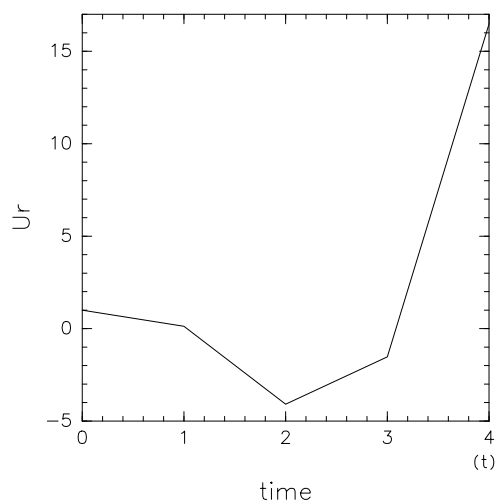


図 9: 古典的 Runge - Kutta 公式において, $\Delta t = 1.0$ として式 (1) を解いた場合. ただし $0 \leq t \leq 4$ である.

参考文献

- 荻原 弘堯, 2010 スペクトル法を用いた数値計算 一次元線形移流方程式の場合
- 伊理 正夫, 藤野 和建, 1985 数値計算の常識, 共立出版株式会社, 174pp
- 石岡 圭一, 2004 スペクトル法による数値計算入門, 東京大学出版, 63-66