Asselin (1972) の時間フィルター

小高 正嗣

2011 年 11 月 10 日

本稿では, 大気・海洋の数値モデルにおいてよく用いられている Asselin (1972) の時間フィルターについて解説する.

1 はじめに: Robert (1966) の時間フィルター

Asselin (1972) の時間フィルターは Robert (1966) の時間フィルターに基づいて考案されたものである. Robert (1966) の時間フィルターは以下のようなものである. 常微分方程式

$$\frac{dU}{dt} = f(U, t)$$

をリープ・フロッグスキームを用いて差分化すると,

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t f(U^n, n\Delta t) \tag{1}$$

と表される. ここで Δt は時間格子間隔, $U^n = U(n\Delta t)$ である. これを基に Robert (1966) は以下のようなスキームを考案した.

$$U^{n+1,*} = U^{n-1} + 2\Delta t f(U^{n,*}, n\Delta t), \tag{2}$$

$$U^n = U^{n,*} + 0.01(U^{n+1,*} - 2U^{n,*} + U^{n-1}). \tag{3}$$

上付き添字 $*$ はフィルターをかける前の値であることを表す.

Robert (1966) がこのようなフィルターを考案した目的は, 摩擦項を含むプリミティブ方程式を安定に計算することであった. そこで摩擦方程式に上記のスキームを当てはめた場合の数値解の振舞いを, フォン・ノイマン法を用いて調べる.

まず式 (1) を用いて摩擦方程式を差分化すると,

$$U^{n+1} = U^{n-1} - 2\alpha\Delta t U^n \tag{4}$$

となる. 増幅係数を $\lambda \equiv U^{n+1}/U^n$ と定義すると, λ の満たす方程式は

$$\lambda^2 + 2\alpha\Delta t\lambda - 1 = 0.$$

したがって

$$\lambda_\pm = \alpha\Delta t \pm \sqrt{1 + (\alpha\Delta t)^2} \tag{5}$$

となる. λ_+ が物理モード, λ_- が計算モードに対応する. 明らかに物理モードの増幅係数の絶対値は 1 より大きくなるので, 数値解は不安定である.

次に Robert (1966) のスキームを用いて摩擦方程式を差分化する. 式 (3) を作用する前後での数値解の比を $\mu = U^n/U^{n,*}$ と定義すると,

$$\mu U^{n,*} = U^{n,*} + 0.01(U^{n+1,*} - 2U^{n,*} + \mu U^{n-1,*})$$

である. 摩擦方程式の解 $U^{n,*} = U_0 e^{-\alpha n\Delta t}$ を代入すると,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1 + 0.01(e^{-\alpha\Delta t} - 2)}{1 - 0.01e^{\alpha\Delta t}} \\ &\approx \frac{1 - 0.01(\alpha\Delta t + 2)}{1 - 0.01\alpha\Delta t} \\ &= 1 - \frac{2}{1 - 0.01\alpha\Delta t} \\ &\approx 1 - 2(1 - 0.01\alpha\Delta t) \\ &= 0.01\alpha\Delta t - 1. \end{aligned} \tag{6}$$

ここで $\alpha\Delta t \ll 1$ として近似を行った. この μ を用いると式 (4) は

$$\begin{aligned} U^{n+1,*} &= U^{n-1} - 2\alpha\Delta t U^{n,*} \\ &= \mu U^{n-1,*} - 2\alpha\Delta t U^{n,*} \end{aligned}$$

修正され, λ の満たす方程式は

$$\lambda^2 + 2\alpha\Delta t\lambda - \mu = 0$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned} \lambda_\pm &= \alpha\Delta t \pm \sqrt{\mu + (\alpha\Delta t)^2} \\ &= \alpha\Delta t \pm \sqrt{(\alpha\Delta t)^2 + 0.01\alpha\Delta t - 1} \end{aligned} \tag{7}$$

である. $\alpha\Delta t \ll 1$ のとき根号内の符号は明らかに負である. したがって λ の絶対値は

$$|\lambda| = \sqrt{1 - 0.01\alpha\Delta t}$$

となり, 数値解の不安定性は抑制される.

2 Asselin (1972) の時間フィルター

Asselin (1972) は Robert (1966) で用いられたフィルターを一般化した

$$U^n = U^{n,*} + 0.5\nu(U^{n+1,*} - 2U^{n,*} + U^{n-1}) \tag{8}$$

をリープ・フロッグスキームで離散化された振動方程式において, 計算モードと高周波の物理モードを減衰させるために用いることを提案した.

2.1 基本的な性質

式 (8) のフィルターを振動方程式に適用した際の基本的な性質は, 振動方程式

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U \tag{9}$$

の厳密解

$$U^* = U_0 e^{i\omega t}$$

と, それにフィルターを作用させた解 U との比 $\mu \equiv U/U^*$ を考察することである程度把握することができる. 式 (8) において

$$U^{n,*} = U_0 e^{i\omega n\Delta t}, \quad U^n = \mu U^{n,*}$$

を代入すると,

$$\mu e^{i\omega n\Delta t} = e^{i\omega n\Delta t} + 0.5\nu(e^{i\omega(n+1)\Delta t} - 2e^{i\omega n\Delta t} + \mu e^{i\omega(n-1)\Delta t}).$$

$$\mu = 1 + 0.5\nu(e^{i\omega\Delta t} - 2 + \mu e^{-i\omega\Delta t}).$$

これを μ について解くと,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{(2-\nu)^2 + 2\nu^2(1-\cos\omega)e^{i\omega\Delta t}}{(2-\nu)^2 + 4\nu(1-\cos\omega)} \\ &= R(\nu,\omega)e^{i\delta(\nu,\omega)}. \end{aligned} \tag{10}$$

ここで

$$\begin{aligned} R(\nu,\omega) &\equiv \frac{\sqrt{[(2-\nu)^2 + 2\nu^2(1-\cos\omega\Delta t)\cos\omega\Delta t]^2 + [2\nu^2(1-\cos\omega\Delta t)\sin\omega\Delta t]^2}}{(2-\nu)^2 + 4\nu(1-\cos\omega)}, \\ \delta(\nu,\omega) &\equiv \tan^{-1}\left(\frac{2\nu^2(1-\cos\omega\Delta t)\sin\omega\Delta t}{(2-\nu)^2 + 2\nu^2(1-\cos\omega\Delta t)\cos\omega\Delta t}\right) \end{aligned}$$

である. R はフィルターによる振幅の変調, δ は位相のずれを表す. ν をパラメータとし, R, δ を $\cos\omega\Delta t$ の関数として図示したものが原文図 1 と図 2 である.

- $0.5 \leq \nu \leq 1$ の範囲では, R の $\cos\omega\Delta t$ に対する変化の様子はあまり ν の値によらない.
- 振動数が大きいほど解析解に比べ位相は早く進む. $\nu = 0.25$ になると位相のずれはほとんどなくなる.

3　振動方程式への適用

次に実際に式 (9) を離散化した式に時間フィルター (8) を適用した場合の数値解の振舞いについて考察する. 実際の問題への応用を考慮し, 式 (9) における振動数は低周波成分 ω_L と高周波成分 ω_H の重ね合わせで表されるとする.

$$\frac{dU}{dt} = i(\omega_L + \omega_H)U \tag{11}$$

そして低周波成分に対してはリープフロッグスキーム, 高周波成分に対しては陰的な時間差分スキームである台形スキームを用いて離散化する.

$$\frac{U^{n+1,*} - U^{n-1,*}}{2\Delta t} = i\omega_L U^{n,*} + i\omega_H \frac{U^{n+1,*} + U^{n-1,*}}{2}.$$

ここで時刻 $(n-1)\Delta t$ における数値解には時間フィルター (8) がかけられていると すると,

$$\frac{U^{n+1,*} - U^{n-1}}{2\Delta t} = i\omega_L U^{n,*} + i\omega_H \frac{U^{n+1,*} + U^{n-1}}{2} \tag{12}$$

となる.

増幅係数 λ を $\lambda \equiv U^{n+1,*}/U^{n,*}$ と定義し, 式 (12), (8) から λ を求めると以下のようになる.

$$\lambda_\pm = \frac{\nu + 2i\omega_L\Delta t \pm \sqrt{(\nu-2)^2 + 4(\omega\Delta t)^2(1-\nu) + 4\omega\omega_L(\Delta t)^2(\nu-2)}}{2(1 - i\omega_H\Delta t)}. \tag{13}$$

3.1　台形スキームの場合

$\omega_L = 0$ として台形スキームを用いた場合について考察する. このとき増幅係数は式 (13) に $\omega_L = 0$ を代入して

$$\lambda_\pm = \frac{1 + i\omega\Delta t}{1 + (\omega\Delta t)^2}\left(\frac{\nu}{2} \pm \sqrt{1 + (\omega\Delta t)^2 + \frac{\nu^2}{4} - \nu(1 + (\omega\Delta t)^2)}\right) \tag{14}$$

となる. $\nu \le 1$ の場合, 根号の被関数の符号は必ず正となるため, 位相のずれ

$$\delta \equiv \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}[\lambda_\pm]}{\mathrm{Re}[\lambda_\pm]}\right) = \tan^{-1}(\omega\Delta t)$$

は ν に依存しなくなる. また, 根号の被関数は

$$\begin{aligned} & 1 + (\omega\Delta t)^2 + \frac{\nu^2}{4} - \nu(1 + (\omega\Delta t)^2) \\ = \;& \left(\sqrt{1 + (\omega\Delta t)^2} \mp \nu/2\right)^2 + \nu\sqrt{1 + (\omega\Delta t)^2} \mp \nu(1 + (\omega\Delta t)^2) \\ < \;& \left(\sqrt{1 + (\omega\Delta t)^2} \mp \nu/2\right)^2 \end{aligned}$$

であることから, $\omega > 0, \nu > 0$ の場合の増幅係数の絶対値 $|\lambda_\pm|$ は

$$|\lambda_\pm| < 1$$

となる.

3.2 リープフロッグスキームの場合

次に $\omega_H = 0$ としてリープフロッグスキームを用いた場合について考察する. このとき増幅係数は式 (13) に $\omega_L = 0$ を代入して

$$\lambda_\pm = \frac{\nu}{2} + i\omega_L\Delta t \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)^2 - (\omega\Delta t)^2} \tag{15}$$

となる.

$\omega^2 \le (1 - \nu/2)^2$ の場合,

$$\begin{aligned} |\lambda_\pm|^2 &= (\nu/2)^2 + (1 - \nu/2)^2 - (\omega\Delta t)^2 \pm \nu\sqrt{(1 - \nu/2)^2 - (\omega\Delta t)^2} + (\omega\Delta t)^2 \\ &= (\nu/2)^2 + (1 - \nu/2)^2 \pm \nu\sqrt{(1 - \nu/2)^2 - (\omega\Delta t)^2} \\ &\le (\nu/2)^2 + (1 - \nu/2)^2 \pm \nu\sqrt{(1 - \nu/2)^2} \\ &= (\nu/2 \pm (1 - \nu/2))^2 \\ &= \begin{cases} 1 \\ (\nu - 1)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

となり, $0 < \nu < 2$ であれば $|\lambda_\pm| \le 1$ である.

一方 $\omega^2 > (1 - \nu/2)^2$ となって式の根号の被関数の符号が負になる場合, $|\lambda_\pm| \le 1$ となる条件として、

$$(\omega\Delta t)^2 + (\omega\Delta t)\sqrt{(\omega\Delta t)^2 - (1 - \nu/2)^2} - (1 - \nu/2) < 0 \tag{16}$$

が得られる. $\nu = 1$ の場合にこれを満たす $\omega\Delta t$ は $\omega\Delta t < 0.57$ の範囲にある.

参考文献

Asselin, R. A., 1972: Frequency filter for time integrations. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 487–490.

Robert, A. J. year: 1966 title: The integration of a low order spectal form of the primitive meteorological equations. *J. Meteor. Soc. Japan*, **44**, 237–245.