

## 時間差分スキーム (4)

アダムス-バッシュフォース (Adams-Bashforth) スキームの安定性と位相

ここでは 2 次のアダムス-バッシュフォーススキームについて振動方程式に当てはめた場合の安定性と位相比について述べる. 2 次のアダムスバッシュフォーススキームは

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \left( \frac{3}{2}f^n - \frac{1}{2}f^{n-1} \right)$$

と表せる. 今,  $f = i\omega U$  とすると,

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= U^n + \Delta t \left( \frac{3}{2}f^n - \frac{1}{2}f^{n-1} \right) \\ &= U^n + i\omega\Delta t \left( \frac{3}{2}U^n - \frac{1}{2}U^{n-1} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

増幅係数  $\lambda$  を用いて  $U^{n+1}$  と  $U^n$  を  $U^{n-1}$  で表すと,

$$\begin{aligned} U^n &= \lambda U^{n-1}, \\ U^{n+1} &= \lambda U^n = \lambda^2 U^{n-1}. \end{aligned}$$

これらを (1) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \lambda^2 U^{n-1} &= \lambda U^{n-1} + i\omega\Delta t \left( \frac{3}{2}\lambda U^{n-1} - \frac{1}{2}U^{n-1} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{3}{2}(i\omega\Delta t) \right) \lambda U^{n-1} - \frac{1}{2}(i\omega\Delta t)U^{n-1} \end{aligned}$$

となる. ここで  $p \equiv \omega\Delta t$  とすると

$$\lambda^2 - \left( 1 + i\frac{3}{2}p \right) \lambda + i\frac{1}{2}p = 0. \quad (2)$$

(2) 式からアダムス-バッシュフォーススキームもリープフロッグスキームと同様に 2 つの  $\lambda$  をもつ. (2) 式を  $\lambda$  について解くと,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[ 1 + i\frac{3}{2}p + \sqrt{1 - \frac{9}{4}p^2 + ip} \right], \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[ 1 + i\frac{3}{2}p - \sqrt{1 - \frac{9}{4}p^2 + ip} \right].\end{aligned}\tag{3}$$

$p \rightarrow 0$  のとき,  $\lambda_1 \rightarrow 1$ ,  $\lambda_2 \rightarrow 0$  である. したがって,  $\lambda_1$  に対応するモードを物理モード,  $\lambda_2$  に対応するモードを計算モードと解釈できる.  $p$  が十分小さいとき, 計算モードは減衰する. これはアダムス-バッシュフォーススキームの利点である. そこで,  $|p| < 1$  のときの  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  の振る舞いを (3) 式を用いて調べる. (3) 式の根号の部分をテイラー展開し, 地道に計算すると,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 + ip - \frac{1}{2}p^2 + i\frac{1}{4}p^3 - \frac{1}{8}p^4 + \dots, \\ \lambda_2 &= i\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p^2 - i\frac{1}{4}p^3 + \frac{1}{8}p^4 + \dots.\end{aligned}$$

実部と虚部に分けて表すと,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \left( 1 - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{8}p^4 - \dots \right) + i \left( p + \frac{1}{4}p^3 + \dots \right), \\ \lambda_2 &= \left( \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{8}p^4 + \dots \right) + i \left( \frac{1}{2}p - \frac{1}{4}p^3 - \dots \right)\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}|\lambda_1| &= \sqrt{\lambda_1 \lambda_1^*} \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2}p^4 + \dots \right)^{\frac{1}{2}}, \\ |\lambda_2| &= \sqrt{\lambda_2 \lambda_2^*} \\ &= \left( \frac{1}{4}p^2 + \dots \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{4}$$

さらに根号の中を  $p^4$  までで打ち切ってテイラー展開すると最終的に,

$$\begin{aligned}|\lambda_1| &= 1 + \frac{1}{4}p^4 + \dots, \\ |\lambda_2| &= \frac{1}{2}p + \dots\end{aligned}\tag{5}$$

を得る.  $|\lambda_1|$  は 1 よりも大きく  $|\lambda_2|$  は 1 より小さい. つまりアダムス-バッシュフォーススキームの物理モードは不安定であり, 計算モードは安定で減衰する. 但し, 増幅

係数は  $O(1 + p^4)$  なので  $\omega\Delta t$  を周期にたいして十分小さくとれば  $|\lambda_1|$  が不安定であることがあまり問題にはならない. 今,  $|p| < 1$  より周期を  $T$  とすれば

$$\begin{aligned} |p| &< 1, \\ |\omega\Delta t| &< 1, \\ \left| \frac{\Delta t}{T} \right| &< 1, \end{aligned}$$

である. 物理モードの増幅率は  $\lambda_1 \sim 1 + p^4$  とすると  $n$  回目までの増幅率は,

$$\begin{aligned} \lambda_1^n &\approx (1 + p^4)^n \\ &= 1 + np^4 + O(p^8) \end{aligned}$$

となる. 今  $n$  回目までの計算が一周期分とすると,

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{n}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \lambda_1^n &\approx 1 + \frac{T}{\Delta t} p^4 + O(p^8) \\ &\approx 1 + \frac{1}{\omega\Delta t} p^4 \\ &= 1 + p^3 \end{aligned}$$

である. つまり,  $O(p) \sim 0.1$  と仮定するとだいたい 100 ぐらいの増幅率になる.

また, 4 段階数のアダムス-バッシュフォーススキームなら物理モードは安定であることも知られている. 参考に 4 段階数のアダムス-バッシュフォーススキームの安定性の図を図 1 に示す<sup>1)2)</sup>.

位相比  $\frac{\theta}{p}$  を求める.

$$\theta = p \arctan \left( \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}} \right)$$

<sup>1)</sup>なぜか上部と下部に回転してしまっている部分が出ている.

<sup>2)</sup>4 段階数のアダムス-バッシュフォーススキームは以下のようなになる.

$$U_{n+1} = U_n + \frac{h}{27} (55f^n - 59f^{n-1} + 37f^{n-2} - 9f^{n-3})$$

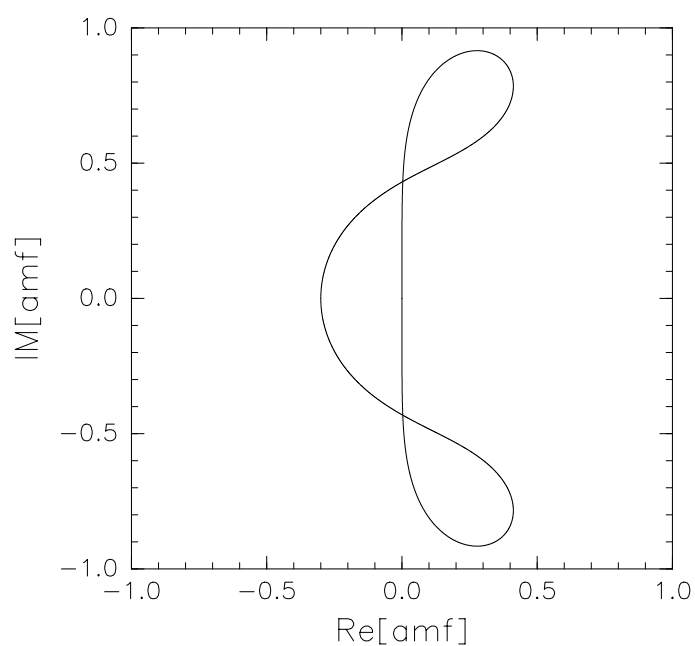


図 1:  $\lambda$  を何らかの複素数としたとき  $dU/dx = \lambda x$  での 4 段階数のアダムスバッシュフォーススキームの安定性の図. 横軸が実軸, 縦軸が虚軸を表している. この実線内部に含まれるとき安定となる.

なので  $|p| \ll 1$  のときの物理モードの位相比  $\frac{\theta_1}{p}$  は,

$$\begin{aligned}\frac{\theta_1}{p} &= \arctan \left( \frac{\frac{1}{4}p^3 + \frac{3}{16}p^4 + \dots}{1 - \frac{1}{2}p^2 + \dots} \right) \\ &\approx \arctan \left( \frac{1}{4}p^3 \right) \\ &\approx \frac{1}{4}p^3 < 1.\end{aligned}$$

計算モードの位相比  $\frac{\theta_2}{p}$  は,

$$\begin{aligned}\frac{\theta_2}{p} &= \arctan \left( \frac{\frac{1}{2}p - \frac{1}{4}p^3 - \dots}{\frac{1}{2}p^2 - \frac{3}{16}p^4 + \dots} \right) \\ &\approx \arctan \left( \frac{1}{p} \right) \\ &\approx \frac{\pi}{2} > 1.\end{aligned}$$

よって、物理モードの位相は早く進み、計算モードの位相は遅く進む。