オイラー(Euler) 法の基礎

常微分方程式の数値積分法については別のノートでより多くの種類を詳しく紹介する. ここでは最も原始的な解法であるオイラー法を紹介する[1)].

オイラー法の公式

今, 常微分方程式

$$\frac{\partial x^i(t)}{\partial t} = f(x^1(t), x^2(t), \cdots, x^m(t), t) \qquad (a \le t \le b)(i = 1, 2, \cdots, m) \text{ 初期条件} : x^i(a) = x_0$$

を解くことを考える.

オイラー法とは常微分方程式の初期値問題を解くもっとも原始的な解法である. 刻み幅と呼ばれる量 h を仮に置き, 独立変数 t を

$$t_n = a + nh(\text{ただし } n = 0, 1, 2, \dots) \tag{1}$$

というように刻み幅ごとにずらしていったときに, その都度各未知関数の値 $x^i(t_n)$ が刻み幅 h が十分小さいとき

$$x^i(t_n) \approx x^i_n$$

となると近似する. そのとき

$$\begin{aligned} f^i_n &\equiv f^i(x^1_n, \dots, x^m_n, t_n) \\ x^i_{n+1} &\approx x^i_n + hf^i_n \end{aligned} \tag{2}$$

[1)]オイラー法の安定性などの詳しい話も別のノートでする.

として次々と定めていくことで $x(t)$ を求める[2]. $m = 1$ の時の概念図を図 1 にまとめた.

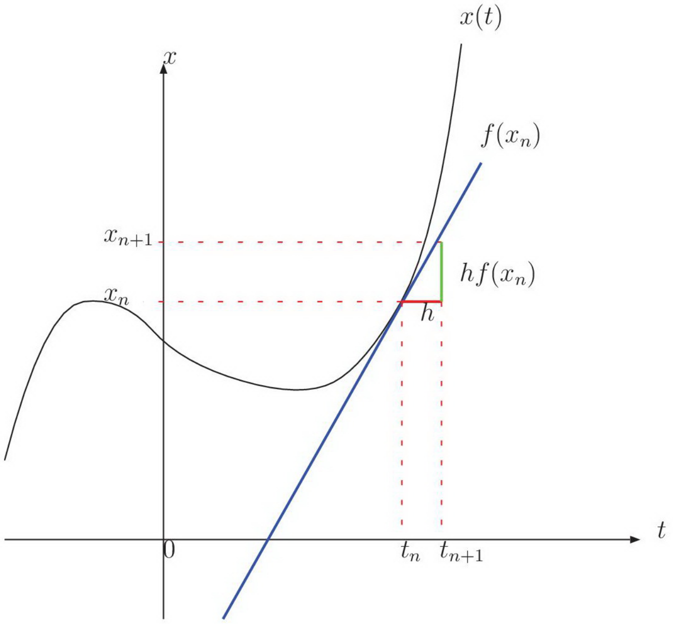

図 1: オイラー法の概念図. 青線は点 (t_n, x_n) での傾き $f(x_n)$ の直線. t_{n+1} のときの値 x_{n+1} が $x(t_{n+1})$ での値と同じと近似して計算していく.

この方法は初期条件 x_0^i が与えられているために可能である.

オイラー法の打切り誤差

簡単のためこれからは $m = 1$ の場合を考える.

今オイラー法の打切り誤差 ϵ を求める. $x(t_{n+1})$ を $t = t_n$ の周りでテイラー展開す

[2] (2) 式を導く.

$$\begin{aligned} \frac{dx^i(t)}{dt} &= f^i(x_n^1(t), \ldots, x_n^m(t), t_n), \\ \frac{x_{n+1}^i - x_n^i}{t_{n+1} - t_n} &\approx f_n^i, \\ \frac{x_{n+1}^i - x_n^i}{h} &= f_n^i, \\ x_{n+1}^i &= x_n^i + h f_n^i. \end{aligned} \tag{3}$$

ると,

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)\bigg|_{t=t_n} \cdot h + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)\bigg|_{t=t_n} \cdot h^2 + \cdots \tag{4}$$

となる. また離散化した x_n を $t = t_n$ の周りでテイラー展開した式は

$$x_{n+1} = x_n + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)\bigg|_{t=t_n} \cdot h + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x_n}{dt^2}\right)\bigg|_{t=t_n} \cdot h^2 + \cdots$$

となる. オイラー法では近似解を $t = t_n$ の周りでテイラー展開した式において 1 次の項までを考慮し,

$$x_{n+1} \approx x_n + hf_n \tag{5}$$

と表される. $x(t_n) = x_n$ としたとき, オイラー法の式 (5) 式はテイラー展開した式 (4) 式の 1 次の項まで一致する. このとき, 1 ステップ目の打切り誤差 ϵ は

$$\begin{aligned}\epsilon &= x(t_{n+1}) - x_{n+1} \\ &= x(t_n) + \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)\bigg|_{t=t_n} \cdot h + O(h^2) - (x_n + hf_n) \\ &= O(h^2).\end{aligned}$$

ある t での x_n を x_t としたときのオイラー法の式は

$$\begin{aligned}x_t &\approx x_{t-1} + hf_{t-1} \\ &\approx x_{t-2} + hf_{t-2} + hf_{t-1} \\ &\approx x_0 + hf_0 + hf_1 + \cdots hf_{t-2} + hf_{t-1}\end{aligned}$$

となる. それぞれのステップでの誤差はほぼ等しいとすると t ステップまでの誤差の合計はステップ数 t 個分の誤差になる. オイラー法の一度のステップで出る誤差は $O(h^2)$ なので,

$$\epsilon = t \times O(h^2)$$

となる. 今, $t = t_t$ とすると

$$\begin{aligned}t_t &= t_{t-1} + h \\ &= t_{t-2} + 2h \\ &= a + th\end{aligned}$$

となる. よって,

$$t = \frac{t_t - a}{h}$$

となるのでステップ数は $O(h^{-1})$ である. よって, あるステップ数までの合計の打切り誤差は

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= O(h^{-1}) \times O(h^2) \\
&= O(h) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

となる[3].

刻み幅を決めるときの注意

実際に問題を解くときに困るのは, 刻み幅 h の値と, その h を用いて得られた数値解がどこまで良く近似しているかという点である. これらについては各論あるが, 結局のところ f^i が良く知られた関数でない限りはよくわからない. 実践的には, 区間 $[a, b]$ で何点かという程度のかなり大きめの h を設定しておき, h の幅を徐々に半分にしていきながら繰り返し同じ問題を解くのが良い. これを試してみると, 最初は h と $\dfrac{h}{2}$ の数値解がかなり食い違うが, 徐々にある値に近づいていく様子が見られる.

オイラー法による数値解の誤差は (6) 式より, h に比例するので h を半分にすると誤差も約半分になるという傾向がある. ある h でオイラー法を計算したときの値を x_1, 真の値を α, その値からの誤差を ϵ_1 とすると,

$$x_1 = \alpha + \epsilon_1.$$

さらに h を半分にしてオイラー法を計算する. そのときでた値を x_2, 誤差を ϵ_2 とすると

$$x_2 = \alpha + \epsilon_2.$$

このとき x_1 と x_2 との差は

$$x_1 - x_2 = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

である. このとき, 刻み幅 h を半分にしたら誤差も半分になるので

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 &= \epsilon_1 - \frac{\epsilon_1}{2} \\
&= \frac{\epsilon_1}{2}
\end{aligned}
$$

[3] つまり, q 次の項までテイラー展開が一致するときの数値計算による誤差は $O(h^q)$ となるということである.

となり, より小さな h の数値解に含まれる誤差はその数値解と一つ前の h による数値解との差と同じ程度の大きさになる. x_2 のときより更に h を半分にしてオイラー法を計算する. その時の値を x_3 とすると同様に

$$
\begin{aligned}
x_2 - x_3 &= \frac{\epsilon_2}{2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\epsilon_1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(x_1 - x_2).
\end{aligned}
$$

よって,「x_1 と x_2 の差が x_2 と x_3 との差の約半分である」ということが,「数値解法がオイラー法として機能している」ことの指標にもなる.

このように数値解法では多くの刻み幅による計算を試みなければならず, しかも最終的な解を求める計算以外は実質無駄である. この「無駄」な手間の量を見積もってみる.

今 h での手間の量を n とする. この一つ前の刻み幅は $2h$ である. このときの手間の量は刻み幅が倍になっているので $\dfrac{n}{2}$ である. さらにこの後も刻み幅を倍, 倍として計算していく. このときある k 回目の計算にかかる手間の量は $\dfrac{n}{2^k}$ となる. よって, h の時の「有効な手間」以外の手間の量 S は,

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{2^k} \\
&= \lim_{k\to\infty}(n - \frac{n}{2^k}) \\
&\le n
\end{aligned}
$$

となる. よって, 多く見積もっても「有効な手間の量」と同じ程度となる. このように, たかだか 2 倍の計算量で結果に対する自信と保証とが得られると考えれば, さほど無駄は大きくないと捉えることもできる. 微分方程式の数値解に時々現れる「不安定現象」[4] や「幻影解」[5] とかも, このように眺めればすぐに発見できる.

[4] 解の発散のことである.

[5] 誤差の蓄積によって真の解とかけ離れた解となってしまった数値解のことである.

例題

次の常微分方程式から $x(t)$ を求めよ.

(1)$\dfrac{dx}{dt} = 1 - x^2, x(0) = 0, (0 \le t \le 1.6)$.

(1) の解析解は $\tanh t$ である. この解析解との誤差を求めよ.

(2)$\dfrac{dx}{dt} = -\omega x, x(0) = 1, (0 \le t \le 1.0)$.

ここで $\omega = \pi$ とする.

(2) の解析解は $\exp(-\omega t)$ である. この解析解との誤差を求めよ.

参考文献

伊理正夫, 藤野和建, 1985,「数値計算の常識」 共立出版, ISBN 4320013433

Mesinger, F., and Arakawa, A., 1976, Numerical methods used in atmospheric models, GARP Publications series (World Meteorological Organization), No. 17, Part 1., 64 pp

石岡 圭一, 2004,「スペクトル法による数値計算入門」, 東京大学出版会, ISBN:4130613057