

時間差分スキーム

この章では独立変数, 従属変数がともに1つの常微分方程式について考える. なぜなら1次元線形移流方程式も連立常微分方程式を解く問題に帰着されるからである.

7つの時間差分スキームを具体的な常微分方程式にあてはめて, スキームの安定性と位相の振る舞いについて考える. この章で取り上げる常微分方程式は, 振動方程式と摩擦方程式である.

$$\frac{dU}{dt} + i\omega U = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dU}{dt} + \alpha U = 0. \quad (2)$$

時間差分スキームの定義

以下のような常微分方程式を考える.

$$\frac{dU}{dt} = f(U, t). \quad (3)$$

微分方程式 (3) の解を $U(t)$ とし, $U(n\Delta t)$ における近似的な解を U^n と表記する. 時間差分スキームを適用した差分式が,

$$U^{n+1} = \sum_{k=1}^N a_{k-1} U^{n-k+1} + \Delta t f(U^{n+1}, U^n, U^{n-1}, \dots, U^{n-N+1}, (n+1)\Delta t, n\Delta t, (n-1)\Delta t, \dots, (n-N+1)\Delta t) \quad (4)$$

と書けるとき, これを N 段階 (N-step) スキーム¹⁾ という. すなわち, 時刻 $t = (n+1)\Delta t$ の U^{n+1} を求める差分式に, いくつの異なる時刻の U^n が現れているか, ということである. a_k は定数であり, f はある既知の関数である. f の中に U^{n+1} を含まない差分スキームを陽的なスキーム (explicit scheme) といい, 含む差分スキームを陰的なスキーム (implicit scheme) という. また, 段数 (stage) とは U^n から U^{n+1} を計算するのに関数 f を何回計算するかを表す.

¹⁾N レベル (N-level) スキームということもある.

1 段階 (1-step) スキーム

1 段階スキームとは, U^{n+1} を U^n を用いて求めるスキームである. 本節で扱う 1 段階スキームは,

- オイラースキーム (前進差分スキーム)
- 後退差分スキーム
- 台形スキーム (修正オイラースキーム)
- 松野スキーム (前進・後退スキーム)
- ホインスキーム

の 5 つである. この 5 つのスキームをそれぞれ紹介し, その誤差を考察する.

オイラースキーム (前進差分スキーム)

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = f^n,$$

すなわち,

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t f^n. \quad (5)$$

ただし, $f^n = f(U^n, n\Delta t)$ である. オイラースキームの打ち切り誤差 $\varepsilon_{\text{オイラー}}$ は次のとおりである. まず $U((n+1)\Delta t)$ を $n\Delta t$ のまわりでテイラー展開して,

$$U((n+1)\Delta t) = U(n\Delta t) + \frac{dU}{dt} \Big|_{n\Delta t} n\Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} \Big|_{n\Delta t} (n\Delta t)^2 + \dots$$

より,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{オイラー}} &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - f^n \\ &= \frac{dU}{dt} \Big|_{n\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} \Big|_{n\Delta t} n\Delta t + \dots - f^n \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} \Big|_{n\Delta t} n\Delta t + \dots \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\varepsilon_{\text{オイラー}} = O(\Delta t).$$

後退差分スキーム

$$\begin{aligned}\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} &= f^{n+1}, \\ U^{n+1} &= U^n + \Delta t f^{n+1}.\end{aligned}\tag{6}$$

但し, $f^{n+1} = f(U^{n+1}, (n+1)\Delta t)$ である. 後退差分スキームの打ち切り誤差 $\varepsilon_{\text{後退}}$ は次の通りである.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{後退}} &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - f^{n+1} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[U^{n+1} - \left(U^{n+1} - \left. \frac{dU}{dt} \right|_{n+1} \Delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dt^2} \right|_{n+1} (\Delta t)^2 + \dots \right) \right] - f^{n+1} \\ &= -\frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dt^2} \right|_{n+1} \Delta t - \dots.\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\varepsilon_{\text{後退}} = O(\Delta t).$$

(6) 式は求めたい値である U^{n+1} 自体が右辺に含まれている. よって後退差分スキームは陰的なスキームである.

台形スキーム

$$\begin{aligned}\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} (f^n + f^{n+1}), \\ U^{n+1} &= U^n + \frac{1}{2} \Delta t (f^n + f^{n+1}).\end{aligned}\tag{7}$$

台形スキームの打ち切り誤差 $\varepsilon_{\text{台形}}$ は次の通りである.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{台形}} &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} (f^n + f^{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} f^n \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} f^{n+1} \\ &= \frac{(\varepsilon_{\text{オイラー}} + \varepsilon_{\text{後退}})}{2} \\ &= \frac{1}{3} \left. \frac{d^3U}{dt^3} \right|_n (\Delta t)^2 + \dots \\ \varepsilon_{\text{台形}} &= O(\Delta t^2).\end{aligned}$$

台形スキームは (7) 式も求めたい値である U^{n+1} 自体が右辺に含まれている。よって台形スキームは 2 次の精度を持つ陰的なスキームである。

松野スキーム (前進・後退スキーム)

松野スキームは 1-step, 2-stage (1 段階 2 段) のスキームである。

$$\begin{aligned} U^* &= U^n + \Delta t f^n, \\ U^{n+1} &= U^n + \Delta t f^*. \end{aligned} \quad (8)$$

但し, $f^* = f(U^*, (n+1)\Delta t)$ である。松野スキームの打ち切り誤差 $\varepsilon_{\text{松野}}$ は次のとおりである。

$$\begin{aligned} f^* &= f^n + \frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= f^n + \left(\frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t + O(\Delta t^2), \end{aligned}$$

$$U^{n+1} = U^n + \frac{dU}{dt} \Big|_n \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} \Big|_n \Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

であるため,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{松野}} &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - f^* \\ &= \frac{dU}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} \Delta t + O(\Delta t^2) - \left[f^n + \left(\frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t + O(\Delta t^2) \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] \Delta t + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

ゆえに, 松野スキームは 2 次の精度をもつ。

ホインスキーム

修正オイラススキームとも, 2 次のルンゲクッタスキームとも呼ばれる。

$$\begin{aligned} U^* &= U^n + \Delta t f^n, \\ U^{n+1} &= U^n + \frac{1}{2} \Delta t (f^n + f^*). \end{aligned} \quad (9)$$

但し, $f^* = f(U^*, (n+1)\Delta t)$ である。ホインスキームの誤差 $\varepsilon_{\text{ホイン}}$ は松野スキームの時と同様にして,

$$\begin{aligned} f^* &= f^n + \left(\frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t + O(\Delta t^2), \\ U^{n+1} &= U^n + \frac{dU}{dt} \Big|_n \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} \Big|_n \Delta t^2 + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

なので, $\frac{d}{dt}f(U, t) = \frac{\partial f}{\partial U} \frac{dU}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$ と $\frac{dU}{dt} = f$ に注意すると,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{ホイン}} &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}(f^n + f^*) \\ &= \frac{dU}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} \Delta t + O(\Delta t^2) - \left[f^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial U} \frac{dU}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] \Delta t + \frac{1}{2} O(\Delta t^2) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{d^2U}{dt^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial U} \frac{dU}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] \Delta t - O(\Delta t^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dU}{dt} - f \right) \Delta t - O(\Delta t^2) \\ &= -O(\Delta t^2).\end{aligned}$$

ゆえにホインスキームは 2 次の精度をもつ。

2 段階 (2-step) スキーム

U^{n+1} を求める式に 2 つの U^i ($i \leq n$) が現れるスキーム. ただし, 1 ステップ目の計算 (U^0 から U^1 を求めるとき) には使えない. 本節では,

- リープフロッグスキーム
- アダムス-バッシュフォーススキーム

の 2 つのスキームを紹介し, それぞれの精度について考察する.

リープフロッグスキーム (Leapfrog scheme)

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t f^n \quad (10)$$

打ち切り誤差は,

$$\begin{aligned}U^{n+1} &= U^n + \frac{dU}{dt} \Big|_n \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} \Big|_n (\Delta t)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3U}{dt^3} \Big|_n (\Delta t)^3 + O(\Delta t^4), \\ U^{n-1} &= U^n - \frac{dU}{dt} \Big|_n \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} \Big|_n (\Delta t)^2 - \frac{1}{3!} \frac{d^3U}{dt^3} \Big|_n (\Delta t)^3 + O(\Delta t^4)\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{leap}} &= \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} - f^n \\ &= \frac{dU}{dt} \Big|_n + \frac{1}{3!} \frac{d^3U}{dt^3} \Big|_n (\Delta t)^2 + O(\Delta t^4) - f^n \\ &= O(\Delta t^2).\end{aligned}$$

アダムス-バッシュフォーススキーム (Adams-Bashforth scheme)

ここでは 2 次精度のアダムス-バッシュフォーススキームを紹介する.

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \left(\frac{3}{2} f^n - \frac{1}{2} f^{n-1} \right).$$

右辺第 2 項の段階数を増やすことで精度を上げることができる²⁾. 打ち切り誤差は,

$$f^{n-1} = f^n - \left(\frac{\partial f}{\partial U} \frac{dU}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t + O(\Delta t^2)$$

より,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{AB} &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \left(\frac{3}{2} f^n - \frac{1}{2} f^{n-1} \right) \\ &= \frac{dU}{dt} \Big|_n + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} \Big|_n \Delta t - \left\{ f^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial U} \frac{dU}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t + O(\Delta t^2) \right\} + O(\Delta t^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dU}{dt} - f \right) \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

アダムス-バッシュフォーススキームは段階数と段数が一致するスキームである.

²⁾たとえば 4 次精度のものもある. 4 次精度のアダムス-バッシュフォーススキームは次のとおりである.

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{24} (55f^n - 59f^{n-1} + 37f^{n-2} - 9f^{n-3}).$$

右辺第 2 項の段階数を増やすことで, 4 次以上の精度をもつスキームを作ることにもできる.

スキームのまとめ

1 段階スキーム

オイラースキーム

$$\begin{aligned}U^{n+1} &= U^n + \Delta t f^n, \\f^n &= (U^n, n\Delta t), \\ \varepsilon &= O(\Delta t).\end{aligned}$$

後退差分スキーム

$$\begin{aligned}U^{n+1} &= U^n + \Delta t f^{n+1}, \\f^{n+1} &= (U^{n+1}, (n+1)\Delta t), \\ \varepsilon &= O(\Delta t).\end{aligned}$$

台形スキーム

$$\begin{aligned}U^{n+1} &= U^n + \frac{1}{2}\Delta t (f^n + f^{n+1}), \\ \varepsilon &= O(\Delta t^2).\end{aligned}$$

松野スキーム

$$\begin{aligned}U^* &= U^n + \Delta t f^n, \\U^{n+1} &= U^n + \Delta t f^*, \\f^* &= (U^*, (n+1)\Delta t), \\ \varepsilon &= O(\Delta t).\end{aligned}$$

ホインスキーム

$$\begin{aligned}U^* &= U^n + \Delta t f^n, \\U^{n+1} &= U^n + \frac{1}{2}\Delta t (f^n + f^*), \\f^* &= (U^*, (n+1)\Delta t), \\ \varepsilon &= O(\Delta t^2).\end{aligned}$$

2 段階スキーム

リーブフロッグスキーム

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t f^n,$$
$$\varepsilon = O(\Delta t^2).$$

アダムス-バッシュフォーススキーム

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \left(\frac{3}{2}f^n - \frac{1}{2}f^{n-1} \right),$$
$$\varepsilon = O(\Delta t^2).$$

振動方程式への応用

本節では振動方程式,

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= f(U, t), \\ f(U, t) &= i\omega U \quad (\omega \in \mathbf{R})\end{aligned}\tag{11}$$

について, 様々な時間差分スキームを適用し, その安定性を調べる. 様々な偏微分方程式は最終的に振動方程式を解く問題に帰着することが多い³⁾.

振動方程式 (11) の一般解は,

$$U(t) = U(0)e^{i\omega t},$$

であり, $t = n\Delta t$ の場合,

$$U(n\Delta t) = U(0)e^{i\omega n\Delta t}$$

となる.

様々な時間スキームを適用するまえに, フォンノイマン法による安定性解析のため, 増幅係数を定義しておく.

$$\lambda \equiv \frac{U^{n+1}}{U^n}.\tag{12}$$

³⁾ 偏微分方程式が振動方程式に帰着する例を 2 つ挙げる.

例 1) 1 次元線形移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$u = \text{Re} [U(t)e^{ikx}]$ とおくと,

$$\frac{dU}{dt} + ikcU = 0$$

となつて, 振動方程式 (11) において $\omega = -kc$ とおいたものに等しくなる.

例 2) 慣性振動

$$\frac{du}{dt} = fv, \quad \frac{dv}{dt} = -fu.$$

複素速度 $U \equiv u + iv$ を導入すると,

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt} &= fv - ifu \\ &= -if(u + iv).\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\frac{dU}{dt} = -ifU.$$

これは, $\omega = -f$ とした振動方程式である.

ただし,

$$\lambda = |\lambda|e^{i\theta}. \quad (13)$$

この時,

$$U^n = U^0|\lambda|^n e^{in\theta}. \quad (14)$$

とかける. 安定性は以下の様に評価される.

$$\begin{aligned} |\lambda| > 1 & \quad \text{不安定} \\ |\lambda| = 1 & \quad \text{中立} \\ |\lambda| < 1 & \quad \text{減衰} \end{aligned}$$

位相については, 真の解の位相と数値解の位相との比をとって評価する. 真の解の位相は $n\omega\Delta t$, 数値解の位相は $n\theta$ であるので,

$$\frac{n\theta}{n\omega\Delta t} = \frac{\theta}{\omega\Delta t}.$$

評価は以下の通りである.

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\omega\Delta t} > 1 & \quad \text{位相は数値解の方が速く進む} \\ \frac{\theta}{\omega\Delta t} = 1 & \quad \text{位相は一致} \\ \frac{\theta}{\omega\Delta t} < 1 & \quad \text{位相は数値解の方が遅く進む} \end{aligned}$$

正確な数値解を得るには $|\lambda|, \frac{\theta}{\omega\Delta t}$ とともに 1 に近い方がよい. そうでない場合, 「計算モード」と呼ばれる偽りの解が現れることがある. この「計算モード」は $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ にしても, 真の解に一致しない. 「計算モード」の振幅を抑制するためには, $|\lambda| < 1$ とした方がよい. 以降の節ではそれぞれのスキームを振動方程式にあてはめた場合の安定性と位相比について考察していく.

反復しない 1 段階スキームの安定性

U^n から U^{n+1} を計算するのに関数 f を 1 回だけ計算する 1 段階スキームを取り扱う. この様なスキームを 1 段階 1 段のスキームなどと呼ぶこともあるが, 以下では反復しない 1 段階スキームと呼ぶことにする. 反復しない 1 段階スキームの一般的な式は,

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t (\alpha f^n + \beta f^{n+1}). \quad (15)$$

但し,

$$\alpha + \beta = 1,$$

である. α と β の与え方によって以下のように分類される.

$$\alpha = 1, \beta = 0 \quad \text{オイラースキーム}$$

$$\alpha = 0, \beta = 1 \quad \text{後退スキーム}$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \quad \text{台形スキーム}$$

振動方程式では $f = i\omega U$ なので, 振動方程式のスキームの一般的な形は,

$$U^{n+1} = U^n + i\omega\Delta t (\alpha U^n + \beta U^{n+1}).$$

と表せる. 増幅係数 $\lambda = \frac{U^{n+1}}{U^n}$ を導入すると,

$$\lambda = 1 + i\omega\Delta t(\alpha + \beta\lambda).$$

ゆえに, $p \equiv \omega\Delta t$ とおくと,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1 + i\omega\Delta t\alpha}{1 - i\omega\Delta t\beta} \\ &= \frac{1 + i\alpha p}{1 - i\beta p}, \end{aligned}$$

すなわち,

$$\lambda = \frac{1}{1 + \beta^2 p^2} (1 - \alpha\beta p^2 + ip)$$

である. それぞれのスキームについて (α, β) を代入すると,

オイラースキームの場合 $\lambda = 1 + ip$

後退スキームの場合 $\lambda = \frac{1 + ip}{1 + p^2}$

台形スキームの場合 $\lambda = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}p^2} \left(1 - \frac{1}{4}p^2 + ip \right)$

となる. ここからは, それぞれのスキームについて $|\lambda|$ を調べる.

オイラースキーム

$$|\lambda| = \sqrt{\lambda\lambda^*} = \sqrt{1 + p^2} > 1.$$

よって, オイラースキームは振動方程式に対し不安定である. 但し, $p = \omega\Delta t \ll 1$ のとき,

$$\begin{aligned} |\lambda| &= 1 + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}p^4 + \dots \\ &= 1 + O(\Delta t^2) \\ &= 1 + O(\Delta t^2), \end{aligned}$$

となり、フォンノイマン法の安定性条件は満たしている。

後退スキーム

$$|\lambda| = \sqrt{\lambda\lambda^*} = \frac{1}{1+p^2} \sqrt{1+p^2} = \frac{1}{1+p^2} < 1$$

よって、後退スキームは Δt の大きさによらず安定である。但し、 ω が大きいほど減衰率も大きくなる。実際の問題では、 ω の大きい解 (高周波数解) は数値的に増幅しやすい (初期値の誤差のため)。したがって、後退差分スキームのような振動数によって選択的に減衰させるスキームは、不要な高周波数解を除去するスキーム (フィルター) としても用いられる。

台形スキーム

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sqrt{\lambda\lambda^*} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{4}p^2} \sqrt{\left(1-\frac{1}{4}p\right)^2 + p} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{4}p^2} \sqrt{\left(1+\frac{1}{4}p\right)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

よって、台形スキームは中立である。以上より、陰的なスキームは Δt の大きさによらず安定である。

反復する 1 段階スキームの安定性

2 段のスキーム、すなわち U^{n+1} をもとめるために関数 f を 2 回計算するスキームのことを、以下では反復しないスキームと呼ぶことにする。前節と同様に、反復する 1 段階スキームをまとめて表すと、

$$U^{(n+1)*} = U^n + \Delta t f^n, \quad (16)$$

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t (\alpha f^n + \beta f^{(n+1)*}), \quad (17)$$

$$\alpha + \beta = 1.$$

である。 α と β の与え方によって以下のように分類される。

$$\alpha = 0, \beta = 1 \quad \text{松野スキーム}$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \quad \text{ホインスキーム}$$

(16) に振動方程式をあてはめると $f^n = i\omega U^n$ なので,

$$U^{(n+1)*} = U^n + i\omega\Delta t U^n. \quad (18)$$

また, (17) に振動方程式をあてはめ, (18) を代入すると,

$$\begin{aligned} U^{(n+1)} &= U^n + \Delta t(\alpha i\omega U^n + \beta i\omega U^{(n+1)*}) \\ &= U^n + i\omega\Delta t\{\alpha U^n + \beta(U^n + i\omega\Delta t U^n)\} \\ &= U^n + i\omega\Delta t\{(\alpha + \beta)U^n + i\omega\Delta t\beta U^n\} \\ &= U^n(1 + i\omega\Delta t - \omega^2\Delta t^2\beta) \end{aligned}$$

ここで再び $p \equiv \omega\Delta t$ とおき, 整理すると,

$$U^{n+1} = (1 - \beta p^2 + ip)U^n.$$

ゆえに, 増幅係数 λ は定義から,

$$\lambda = \frac{U^{n+1}}{U^n} = 1 - \beta p^2 + ip \quad (19)$$

である. それぞれのスキームについて β の値を代入すると,

松野スキームの場合 $\lambda = 1 - p^2 + ip$

ホインスキームの場合 $\lambda = 1 - \frac{1}{2}p^2 + ip$

となる. ここからは, それぞれのスキームについて $|\lambda|$ を調べる.

松野スキーム

松野スキームの場合 $\beta = 1$ であるから, 松野スキームの増幅係数は,

$$\lambda = 1 - p^2 + ip, \quad (20)$$

である. 先ほど述べたように, 安定性を調べるには $|\lambda|$ を求めればよかった. したがって,

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sqrt{\lambda\lambda^*} \\ &= \sqrt{(1 - p^2 + ip)(1 - p^2 - ip)} \\ &= \sqrt{(1 - p^2)^2 + p^2} \\ &= \sqrt{1 - p^2 + p^4}. \end{aligned} \quad (21)$$

安定となるのは $|\lambda| \leq 1$ のときなので, $|p| \leq 1$ であればよい. $p = \omega\Delta t$ なので,

$$|\omega\Delta t| \leq 1.$$

さらに, $\Delta t \geq 0$ なので,

$$\Delta t \leq \frac{1}{|\omega|}. \quad (22)$$

松野スキームの p に対する $|\lambda|$ の振る舞いを知るために, $|\lambda|$ の極値を考える. (20) を p で微分して,

$$\begin{aligned} \frac{d|\lambda|}{dp} &= \frac{4p^3 - 2p}{2\sqrt{p^4 - p^2 + 1}} \\ &= \frac{2p^3 - p}{\sqrt{p^4 - p^2 + 1}} \end{aligned}$$

なので, $|\lambda|$ は $p = 1/2$ で極値になることがわかる. $0 \leq p \leq 1/2$ の範囲では ω が大きいほど $|\lambda|$ が小さくなる. Matsuno (1966) では, 多数の振動数をもつ系では $0 < p < 1/2$ となるように Δt を与える方がよいと指摘している. なぜなら, $0 < p < 1/2$ の範囲では ω が大きいほど減衰率が大きいので, ノイズとなる可能性のある高周波成分をより早く減衰させることができるからである.

ホインスキーム

ホインスキームの増幅係数は, (19) において $\beta = 1/2$ とすればよく,

$$\lambda = 1 + ip - \frac{1}{2}p^2 \quad (23)$$

である. 松野スキームのときと同様にして, 安定性を調べるために $|\lambda|$ を求める.

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sqrt{\lambda\lambda^*} \\ &= \sqrt{(1 + ip - \frac{1}{2}p^2)(1 - ip - \frac{1}{2}p^2)} \\ &= \sqrt{(1 - \frac{1}{2}p^2)^2 + p^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{4}p^4}. \end{aligned} \quad (24)$$

(24) は $p > 0$ で常に 1 より大きくなるので, 振動方程式に対してホインスキームは不安定である. しかし, $p = \omega\Delta t \ll 1$ のとき $|\lambda|$ を $p = 0$ のまわりで展開すると,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{4}p^4\right)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{4}p^4 + O(p^8) \\ &= 1 + \frac{1}{8}p^4 + O(p^8) \\ &= 1 + O(\Delta t^4). \end{aligned}$$

となる. ゆえに,

$$|\lambda| = 1 + O(\Delta t^4) < 1 + O(\Delta t),$$

となり, フォンノイマンの安定性条件を満たす.

1 段階スキームの安定性に関する議論をまとめると次のようになる.

$$\begin{aligned} |\lambda_{\text{オイラー}}| &= \sqrt{1 + p^2}, \\ |\lambda_{\text{後退}}| &= \frac{1}{1 + p^2}, \\ |\lambda_{\text{台形}}| &= 1, \\ |\lambda_{\text{松野}}| &= \sqrt{1 - p^2 + p^4}, \\ |\lambda_{\text{ホイン}}| &= \sqrt{1 + \frac{1}{4}p^4}. \end{aligned}$$

それぞれのスキームの増幅係数の大きさを図示すると次のようになる.

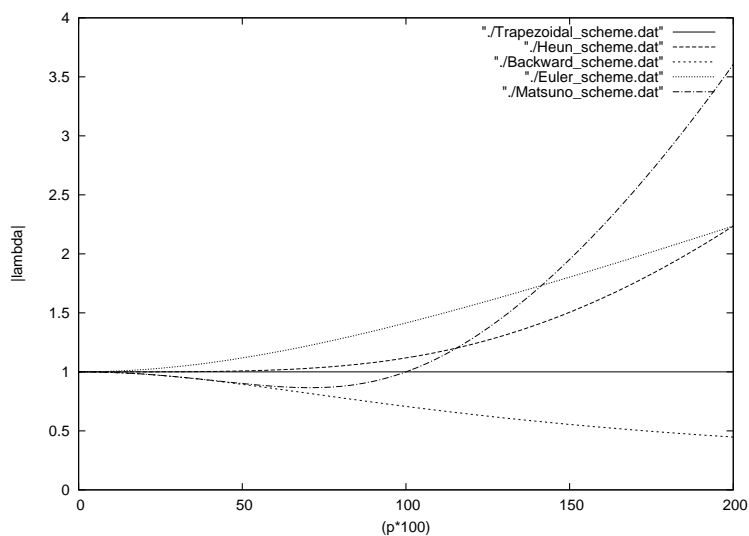


図 1: 5 つの 1 段階スキームの増幅係数の振る舞い. 横軸は $p = \omega \Delta t$, 縦軸は $|\lambda|$ をとっている. 実線は台形スキーム, 破線はホインスキーム, 細点線はオイラースキーム, 1 点鎖線は松野スキーム, 点線は後退スキームをそれぞれ表している.