

次に,  $\theta_1$  の微分を考える<sup>1)</sup>.

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_1}{dp} &= \left( \frac{1}{1 + \left( \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \right)^2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} + \frac{p^2}{\sqrt{1-p^2}(1-p^2)} \right) \\ &= (1-p^2) \left( \frac{1}{\sqrt{1-p^2}(1-p^2)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}.\end{aligned}$$

$\frac{d\theta_1}{dp} > 0$ ,  $p \rightarrow 1$  のとき,  $\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . さらに  $p \geq 0$  のとき  $\theta_2 = \pm\pi - \theta_1$ . したがって,

$$\begin{aligned}U_1^n &= U_1^0 e^{in\theta_1}, \\ U_2^n &= U_2^0 e^{in(\pm\pi - \theta_1)}.\end{aligned}\tag{1}$$

簡単のために  $\theta_1 = \frac{\pi}{8}$  の場合を考える. さらに, 初期において  $\text{Im}(U_1^0) = 0$ ,  $\text{Im}(U_2^0) = 0$  とする. このとき, 物理モード  $U_1^n$  の位相は反時計回りに  $\frac{\pi}{8}$  ずつ増える. 計算モード ( $p > 0$ ) の位相は  $\theta_2 = \pi - \theta_1$  より現象する. これらを実部と虚部に分けると,  $U_1$  は

$$U_1^n = U_1^0 (\cos n\theta_1 + i \sin n\theta_1).$$

よって,

$$\begin{aligned}\text{Re}[U_1^n] &= U_1^0 \cos n\theta_1, \\ \text{Im}[U_1^n] &= U_1^0 \sin n\theta_1.\end{aligned}$$

$U_2$  は

$$\begin{aligned}U_2^n &= U_2^0 e^{in(\pi - \theta_1)} \\ &= U_2^0 e^{in\pi} e^{-in\theta_1} \\ &= (-1)^n U_2^0 (\cos n\theta_1 - i \sin n\theta_1).\end{aligned}$$

<sup>1)</sup>  $\arctan x$  の微分を考える.  $y = \arctan x$  とすると,  $x = \tan y$  と書きかえることができる. よって,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 y} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[U_2^n] &= (-1)^n U_2^0 \cos n\theta_1, \\ \operatorname{Im}[U_2^n] &= (-1)^{n+1} U_2^0 \sin n\theta_1.\end{aligned}$$

これらを図示すると図 1 の様になる.

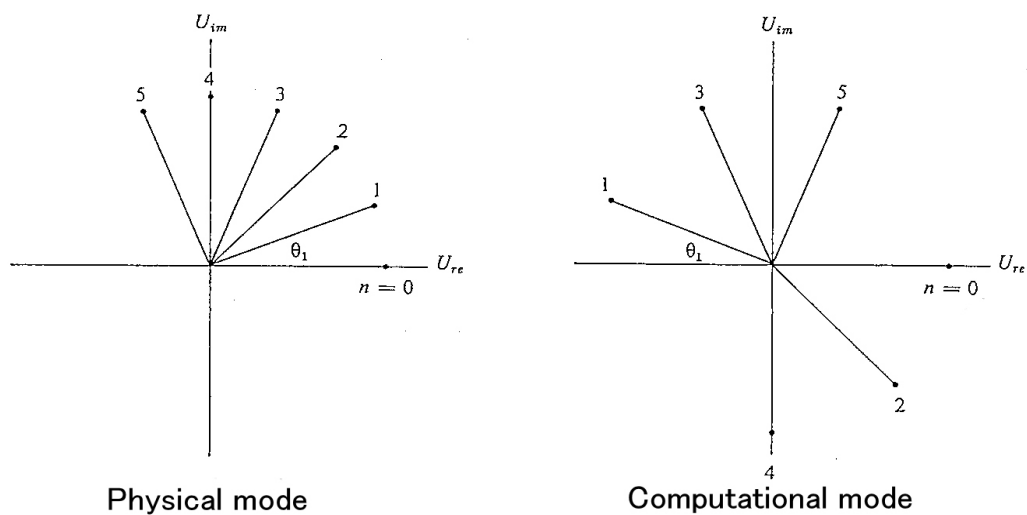


Figure 1: リープフロッグスキームの (A) 物理モードと (B) 計算モードの位相の変化.  $U_1$  の方は  $n$  が増えると反時計回りに動いていく.  $U_2$  の方は  $+$  と  $-$  が交互に入れ替わってしまう.

Case2.  $|p| = 1$  のとき

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ip$$

なので,

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1. \quad (2)$$

ゆえに, この場合, 物理モードも計算モードもともに安定性は中立である.  $\theta_1$  の位相は,

$$\theta = \arctan\left(\frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}\right),$$

$$\tan \theta_1 = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \rightarrow \infty \quad (|p| \rightarrow 1).$$

同様に  $\theta_2$  の位相は,

$$\tan \theta_2 = -\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \rightarrow \infty \quad (|p| \rightarrow 1).$$

よって,

$$\theta_1 = \theta_2 = \pm \frac{\pi}{2} \quad (p = \pm 1). \quad (3)$$

このとき解はどちらのモードも,

$$U^n = U^0 e^{\pm in \frac{\pi}{2}} \quad (4)$$

となる.

Case3.  $|p| > 1$  のとき

$$\lambda_1 = i(p + \sqrt{p^2 - 1}),$$

$$\lambda_2 = i(p - \sqrt{p^2 - 1}).$$

括弧の中身が実数であることに注意すれば,

$$|\lambda_1| = |p + \sqrt{p^2 - 1}|,$$

$$|\lambda_2| = |p - \sqrt{p^2 - 1}| \quad (5)$$

である. したがって,

$$|\lambda_1| > 1 \quad (p > 1),$$

$$|\lambda_2| > 1 \quad (p < -1).$$

ゆえに, 安定性は不安定である.  $|p|$  が 1 を越えると, 急激に不安定になる. 例えば,  $p > 1$  のとき,

$$\frac{d\lambda_1}{dp} = 1 + \frac{p}{\sqrt{p^2 - 1}}.$$

よって,  $p \rightarrow +1$  のとき発散する. 位相は Case2 のときと同様にして,

$$\theta_1 = \theta_2 = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

解は,

$$\begin{aligned} U_1^n &= |p + \sqrt{p^2 - 1}|^n U_1^0 e^{\pm i n \frac{\pi}{2}}, \\ U_2^n &= |p - \sqrt{p^2 - 1}|^n U_2^0 e^{\pm i n \frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

位相の進み方は Case2 と同じだが, 振幅は時間とともに増加することがわかる.

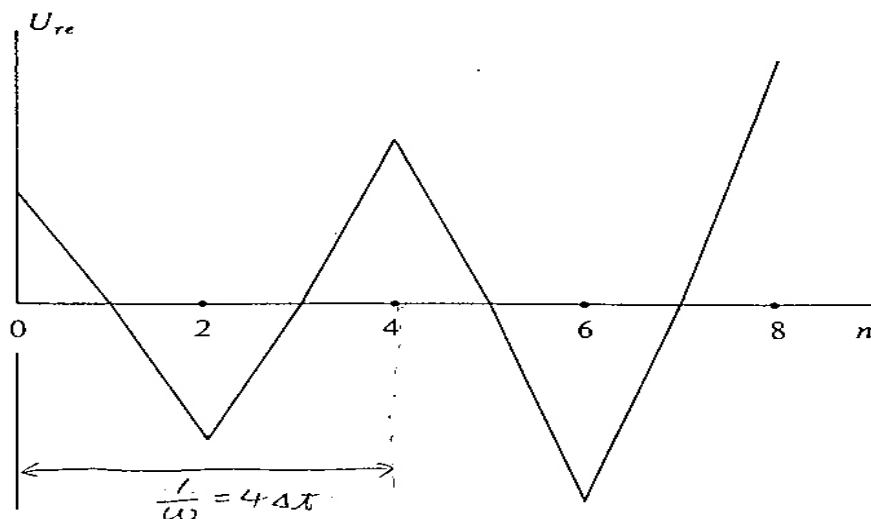


Figure 2: リーフログスキームにおける不安定モードの実部と時間の関係.  $|\lambda| = 1.1$  とし, 初期時刻において虚部をゼロとしている.

図 2 より, 不安定なモードの周期は  $4\Delta t$  である.

まとめ

リーフログスキームの利点は 2 次精度であることと,  $|\omega\Delta t| \leq 1$  のときに安定であることである. 一方, 欠点は計算モードの安定性が中立であることと, 非線形方程式の場合に計算モードが増大する場合があるらしい<sup>2)</sup>. なお, 計算モードを排除するには, 途中で 1 段階スキームを差し込むとよい.

<sup>2)</sup>非線形の場合については, ここでは扱わない.

## 参考文献

川畑 拓也, 2011, 「時間差分スキーム (1)」

URL:[http://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/~gfdlab/comptech/resume/0728/2011\\_0728-takuya.pdf](http://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/~gfdlab/comptech/resume/0728/2011_0728-takuya.pdf)

Mesinger, F., and Arakawa, A., 1976, Numerical methods used in atmospheric models, GARP Publications series (World Meteorological Organization), No. 17, Part 1., 64 pp

石岡 圭一, 2004, 「スペクトル法による数値計算入門」, 東京大学出版会, ISBN:4130613057

竹野 茂治, 2009, 「勾配から角度を求める展開式」

URL:<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/data/arctan1.pdf>

KIT 数学ナビゲーション, 2007, 「微分  $\arctan x$ 」

URL:<http://w3e.kanazawa-it.ac.jp/math/category/bibun/keisan/henkan-tex.cgi?target=/math/category/bibun/keisan/diff-arctan.html>