GFD ワーク 第 1 章は伊理正夫・藤野和建著「数値計算の常識」(以下, 伊理テキスト) の第 1 章を主に参考にしている.

誤差の定義と蓄積

1.1 誤差の定義

量 x の測定値 a に見込まれる誤差が Δa (>0) であるというときには,

$$a - \Delta a < x < a + \Delta a$$

であることを意味し,

$$x = a \pm \Delta a \tag{1.1}$$

と表記する[1]. この Δa を x の絶対誤差という. 実数 x, y の関数として計算される量 $z = f(x, y)$ を考える. y, z の測定値をそれぞれ b, c, 絶対誤差をそれぞれ $\Delta b, \Delta c$ とすると,

$$z = c \pm \Delta c \tag{1.2}$$

と表せる. ここで,

$$c = f(a, b) \tag{1.3}$$

[1] 開区間と閉区間の表記法は以下のとおりである.

開区間 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$

閉区間 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$

左閉右開区間, 左閉半開区間 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$

左開右閉区間, 右閉半開区間 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$

であり,

$$
\begin{aligned}
(\text{誤差の大きさ}) &= |f(a \pm \Delta a, b \pm \Delta b) - f(a,b)| \\
&= \left| \left(f(a,b) \pm \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{x=a,y=b} \Delta a \pm \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{x=a,y=b} \Delta b + \cdots \right) - f(a,b) \right| \\
&= \left| \pm \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{x=a,y=b} \Delta a \pm \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{x=a,y=b} \Delta b + \cdots \right| \\
&\simeq \left| \pm \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{x=a,y=b} \Delta a \pm \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{x=a,y=b} \Delta b \right| \\
&\leq \left| \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{x=a,y=b} \right| \Delta a + \left| \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{x=a,y=b} \right| \Delta b \\
&\equiv \Delta c
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

と表すことができる[2]. ただし, $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ はあまり大きくないと想定している[3].

誤差の蓄積

足し算と掛け算では誤差の蓄積の仕方が異なる. $z = x \pm y$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\Delta c &= \left| \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{x=a,y=b} \right| \Delta a + \left| \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{x=a,y=b} \right| \Delta b \\
&= \Delta a + \Delta b
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

となる. つまり, 絶対誤差 Δc は x, y の絶対誤差 $\Delta a, \Delta b$ の和となる. また, $z = xy$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\Delta c &= \left| \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{x=a,y=b} \right| \Delta a + \left| \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{x=a,y=b} \right| \Delta b \\
&= b\Delta a + a\Delta b
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$
\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \tag{1.6}
$$

となり, z の相対誤差[4] $\dfrac{\Delta c}{c}$ は x, y の相対誤差 $\dfrac{\Delta a}{a}, \dfrac{\Delta b}{b}$ の和となっていることがわかる.

[2] この式は変数の符号などによって成り立たないこともある. しかし, z の誤差は大体大雑把でいいので 4 行目程度に見積もっている.
[3] 1 より小さい値.
[4] 真値に対する測定値からの真値のずれの割合.

参考文献

伊理正夫・藤野和建, 1985: 数値計算の常識, 共立出版