

有限差分法の基礎 (2)

差分方程式の性質

1 次元線形移流方程式を例にしてその式を差分化した場合に現われる性質について読み解いていく.

着目する 1 次元線形移流方程式は, $u = u(x, t)$ のとき,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = \text{const.} \quad (1)$$

ただし初期条件は

$$u(x, 0) = F(x)$$

とする.

まずは, 偏微分方程式 (1) の解析解を求める. (1) 式の解は標準座標の導入により次のようにして求めることができる. まず $\xi = x - ct$ とおき, 独立変数 x, t を ξ, t に変換する.

$$u(x, t) = U(\xi, t).$$

u を t で微分して,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} = -c \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (2)$$

u を x で微分して,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}. \quad (3)$$

(2) 式と (3) 式を (1) 式に代入して,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= -c \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

ゆえに, U は ξ のみの関数でなければならず, t の関数ではない. したがって, f を ξ を成分とする任意の関数として,

$$U(\xi, t) = f(\xi)$$

となる. $\xi = x - ct$ を考慮すると $U(\xi, t) = u(x, t)$ より,

$$u(x, t) = f(x - ct).$$

初期条件をあてはめると,

$$u(x, t) = F(x - ct). \quad (4)$$

(4) 式は (1) 式の解析解である.

特性曲線

簡単のためこれからの話では $c > 0$ とする. (4) 式から, (1) 式の解析解は直線 $x - ct = x_0$ ($x_0 = \text{const}$) 上では常に $f(x_0)$ という一定値をとる. このようにある曲線上で着目する関数の値が一定値をとるような曲線のことを, 特性曲線 (characteristics curve) という. 方程式の解はこの特性曲線に沿って伝播する.

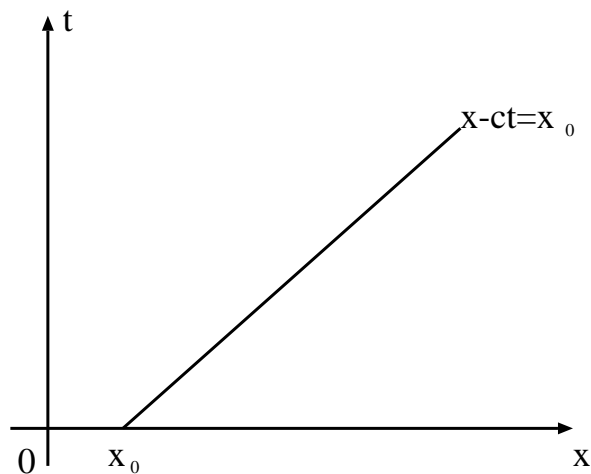


図 1: 1次元線形移流方程式の特性曲線.

適合性 (consistency)

$\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ で差分式が元の式に一致するとき, その差分式は適合性 (consistency) をもつという.

$x = j\Delta x$ において, (1) 式を時間方向にオイラー法 (前進差分), 空間方向に後方差分を用いて差分化すると,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (5)$$

u_j^n は点 $(j\Delta x, n\Delta t)$ における 数値解 u の値である.

ここで, (5) 式の適合性を考える. (5) 式の適合性は精度を求めることでわかる. 数値解の精度 (誤差) は $u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$ で与えられる. 数値解の精度を予測することはできないが, 解析解 $u(j\Delta x, n\Delta t)$ を差分式に代入することで, 差分式の精度を評価することはできる. 差分式の打ち切り誤差を ε とすれば,

$$\frac{u(j\Delta x, (n+1)\Delta t) - u(j\Delta x, n\Delta t)}{\Delta t} + c \left(\frac{u(j\Delta x, n\Delta t) - u((j-1)\Delta x, n\Delta t)}{\Delta x} \right) = \varepsilon. \quad (6)$$

有限差分法の基礎 (1) の差分精度のときと同様にして打ち切り誤差を求める. 左辺第 1 項で $u(j\Delta x, (n+1)\Delta t)$ を $t = n\Delta t$ のまわりでテイラー展開すると,

$$\begin{aligned} u(j\Delta x, (n+1)\Delta t) &= u(j\Delta x, n\Delta t) + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{j,n} \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{j,n} (\Delta t)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)_{j,n} (\Delta t)^3 + \dots \end{aligned}$$

ここで, $u(j\Delta x, (n+1)\Delta t) = u_j^{n+1}$, $u(j\Delta x, n\Delta t) = u_j^n$ であることを注意すると,

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{j,n} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{j,n} \Delta t \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)_{j,n} (\Delta t)^2 + \dots \end{aligned}$$

となる. 同様に左辺第 2 項で $u((j-1)\Delta x, n\Delta t)$ を $x = j\Delta x$ のまわりでテイラー展開すると,

$$\begin{aligned} u((j-1)\Delta x, n\Delta t) &= u(j\Delta x, n\Delta t) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{j,n} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{j,n} (\Delta x)^2 \\ &\quad - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{j,n} (\Delta x)^3 + \dots \end{aligned}$$

ここで, $u((j-1)\Delta x, \Delta t) = u_{j-1}^n$, $u(j\Delta x, n\Delta t) = u_j^n$ に注意すると,

$$\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j,n} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{j,n} \Delta x + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{j,n} (\Delta x)^2 + \dots$$

となる. この式から真の値を引くと

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial t} + c \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{j,n} \Delta t + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_{j,n} (\Delta t)^2 + \dots \\ &\quad - c \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{j,n} \Delta x - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{j,n} (\Delta x)^2 + \dots \right). \end{aligned} \quad (7)$$

よって,

$$\varepsilon = O(\Delta x, \Delta t)$$

となる¹⁾. (7) 式で $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon = 0$ になるので (5) 式は適合性を持つ. また, (5) 式は空間, 時間方向ともに 1 次精度であることもわかる.

収束性

収束性 (convergence) とは $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ のときに, 数値解が真の解に一致することである²⁾. また, あらゆる初期条件に対して, 収束性のある数値解を与えるスキームもまた収束性があると言う. 注意しなければならないことは, 適合性があるからといって, 必ずしも収束性があるとは限らないことである.

(1) 式を例として, 適合性を考えた時と同じように (5) 式の差分式を考える. いま $x - ct = 0$ の直線上にある点 A を考えるとき, 点 A は $u(j\Delta x, n\Delta t)$ の点とする. この関係を図示したのが図 2 のようになる. 連続系の式において, 点 A の解は, 原点での u の解と同じである. 差分系の式においては, 点 A の解は点線より下側の格子点上の値で表現される. 点線より下の斜線をつけた領域を依存領域 (domain of dependence) と呼ぶ. 数値解が真の解に収束するための必要条件は, 依存領域が真の解の特性曲線を含むことである. すなわち,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\Delta x} &\leq \frac{1}{c}, \\ c\Delta t &\leq \Delta x. \end{aligned} \quad (8)$$

¹⁾一般に, 時間差分と空間差分の精度は一致しないため,

$$\varepsilon = O(\Delta x) + O(\Delta t)$$

と表記することもある.

²⁾厳密には $n\Delta t$ を固定して $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon \rightarrow 0$ となること.

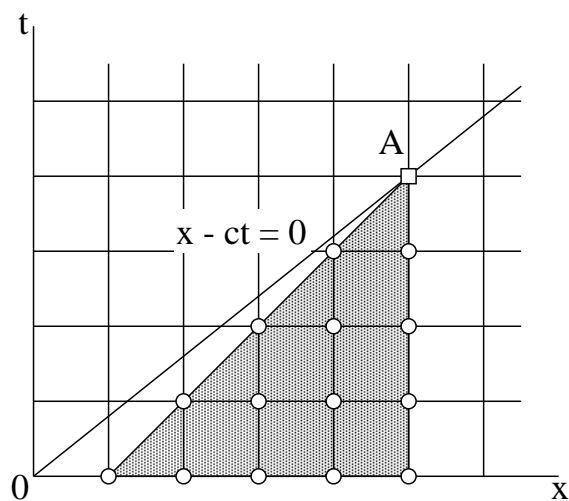


図 2: 特性曲線と依存領域の関係. この例では, $t = 0$ で適切な初期条件をを与え数値積分を行ったとしても点 A を通過する特性曲線が点 A の依存領域に含まれないため点 A における数値解 $u(j\Delta x, n\Delta t)$ は真の解に収束しない.

図2からもわかるように, Δt と Δx の比の値が変わらない限り, 格子間隔を小さくしても依存領域は変化しない. (8) 式を CFL 条件 (Courant-Friedrichs-Lewy condition) という.

安定性 (stability)

$n \rightarrow \infty$ で数値解 $u(j\Delta x, n\Delta t)$ が有界のとき, その差分式は安定であるという³⁾. 差分式の安定性の判定法には, 直接法, エネルギー法, フォンノイマン法の3通りの方法がある.

直接法 (direct method)

真の解が有界であることをすでに知っているとする. このとき数値解の絶対値の最大値が有界であるかどうかを調べる方法が直接法である.

今 $c > 0$ として移流方程式の差分式 (5) 式を u_j^{n+1} について解くと,

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} &= 0, \\ u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n), \\ u_j^{n+1} &= \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) u_j^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x} u_{j-1}^n. \end{aligned}$$

ここで, $\frac{c\Delta t}{\Delta x} = \mu$ とおくと,

$$u_j^{n+1} = (1 - \mu)u_j^n + \mu u_{j-1}^n. \quad (9)$$

よって, 安定性条件は,

$$|u_j^{n+1}| \leq |1 - \mu| |u_j^n| + \mu |u_{j-1}^n|. \quad (10)$$

この式が常に成り立つ条件を考える. $t = (n+1)\Delta t$ での $|u_j^{n+1}|$ の最大値を $\text{Max}_{(j)} |u_j^{n+1}|$ とし, $t = n\Delta t$ での $|u_j^n|$ の最大値を $\text{Max}_{(j)} |u_j^n|$ とする⁴⁾. このとき安定性条件 (10) 式は,

$$\begin{aligned} \text{Max}_{(j)} |u_j^{n+1}| &\leq \text{Max}_{(j)} |(1 - \mu)u_j^n + \mu u_{j-1}^n| \\ &\leq |1 - \mu| \text{Max}_{(j)} |u_j^n| + \mu \text{Max}_{(j)} |u_{j-1}^n|. \end{aligned} \quad (11)$$

³⁾ 正確には $\Delta x, \Delta t$ を固定し, $n \rightarrow \infty$ としたとき, 真の解と数値解との誤差 $u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$ が有界であるときに安定であるという.

⁴⁾ Max の下付きの (j) は空間方向の格子点の全ての中の最大値という意味である.

(i) $|1 - \mu| < 0$, すなわち $1 < \mu$ のとき, (11) 式は,

$$\begin{aligned} \text{Max}_{(j)} |u_j^{n+1}| &< (\mu - 1)\text{Max}_{(j)} |u_j^n| + \mu\text{Max}_{(j)} |u_{j-1}^n| \\ &= (2\mu - 1)\text{Max}_{(j)} |u_j^n| \end{aligned} \quad (12)$$

となる. ここで,

$$\text{Max}_{(j)} |u_{j-1}^n| = \text{Max}_{(j)} |u_j^n|$$

となることを用いた.

(ii) $|1 - \mu| \geq 0$, すなわち $0 < \mu \leq 1$ のとき, (11) 式は,

$$\begin{aligned} \text{Max}_{(j)} |u_j^{n+1}| &\leq (1 - \mu)\text{Max}_{(j)} |u_j^n| + \mu\text{Max}_{(j)} |u_{j-1}^n| \\ &= \text{Max}_{(j)} |u_j^n|. \end{aligned} \quad (13)$$

よって, (i) の場合に $2\mu - 1 > 1$ となることを考慮すると, μ の値によらず安定となる条件は,

$$\text{Max}_{(j)} |u_j^{n+1}| \leq \text{Max}_{(j)} |u_j^n| \quad (14)$$

となる. これが安定性条件である.

エネルギー法 (energy method)

エネルギー法は数値解 u_j^n の 2 乗の和 $\sum_j (u_j^n)^2$ が有界であるかどうかを調べる方法である. 物理学に应用した場合 u^2 はエネルギーに比例する量なので, エネルギー法と呼ばれる.

(9) 式から, $\sum_{j=0}^{J-1} (u_j^{n+1})^2$ を計算する. まず (9) 式の両辺を 2 乗して,

$$(u_j^{n+1})^2 = (1 - \mu)^2 (u_j^n)^2 + \mu^2 (u_{j-1}^n)^2 + 2(1 - \mu)\mu u_j^n u_{j-1}^n.$$

次に j について和をとって,

$$\sum_{j=0}^{J-1} (u_j^{n+1})^2 = \sum_{j=0}^{J-1} [(1 - \mu)^2 (u_j^n)^2 + \mu^2 (u_{j-1}^n)^2 + 2(1 - \mu)\mu u_j^n u_{j-1}^n].$$

ここで周期境界条件 $u_{-1}^n = u_{J-1}^n$ を仮定すると,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{J-1} (u_{j-1}^n)^2 &= (u_{-1}^n)^2 + (u_0^n)^2 + (u_1^n)^2 + \cdots + (u_{J-2}^n)^2 \\ &= (u_{J-1}^n)^2 + (u_0^n)^2 + (u_1^n)^2 + \cdots + (u_{J-1}^n)^2 \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} (u_j^n)^2. \end{aligned}$$

また, コーシー・シュワルツの不等式 (Schwarz's inequality)⁵⁾,

$$\sum ab \leq \sqrt{\sum a^2} \sqrt{\sum b^2},$$

をもちいると,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{J-1} u_j^n u_{j-1}^n &\leq \sqrt{\sum_j (u_j^n)^2} \sqrt{\sum_{j=0}^{J-1} (u_{j-1}^n)^2} \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} (u_j^n)^2. \end{aligned}$$

収束性の条件から, $1 - \mu \geq 0$ でなければならないので,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{J-1} (u_j^{n+1})^2 &= \sum_{j=0}^{J-1} [(1 - \mu)^2 (u_j^n)^2 + \mu^2 (u_{j-1}^n)^2 + 2(1 - \mu)\mu u_j^n u_{j-1}^n] \\ &\leq \sum_{j=0}^{J-1} [(1 - \mu)^2 (u_j^n)^2 + \mu^2 (u_j^n)^2 + 2(1 - \mu)\mu (u_j^n)^2] \\ &= [(1 - \mu)^2 + \mu^2 + 2(1 - \mu)\mu] \sum_{j=0}^{J-1} (u_j^n)^2 \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} (u_j^n)^2, \end{aligned}$$

である. よって,

$$\sum_{j=0}^{J-1} (u_j^{n+1})^2 \leq \sum_{j=0}^{J-1} (u_j^n)^2 \quad (15)$$

のときに安定性条件を満たす.

⁵⁾付録を参照されたい.

フォンノイマン法 (Von Neumann's method)

数値解をフーリエ級数展開し, 展開係数が有界であるかどうかを調べる方法をフォンノイマン法という. 直接法やエネルギー法では u_j^n と u_j^{n+1} を求めてそれらを比べる必要があるがフォンノイマン法は u_j^n と u_j^{n+1} を求めずに安定性を議論できるので, 最もよく用いられる方法である.

1次元線形移流方程式は連続形の場合 (1) 式と表される. (1) 式の解として波数 k を持つ波の解を想定する. そのとき,

$$u(x, t) = \text{Re}[U(t)e^{ikx}] \quad (16)$$

である. 展開係数 $U(t)$ は,

$$\frac{dU}{dt} + ikcU = 0$$

を満たす. 上の常微分方程式の解析解は,

$$U(t) = U(0)e^{ikct}.$$

よって, これを元の展開式に代入すると,

$$u(x, t) = \text{Re}[U(0)e^{ik(x-ct)}] \quad (17)$$

となる. 一方, 離散化した場合, 1次元線形移流方程式は (5) 式のように表される. (16) 式を各格子点上で離散化すると,

$$u_j^n = \text{Re}[U^n e^{ikj\Delta x}].$$

上式を差分式 (5) に代入すると,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} e^{ikj\Delta x} + c \frac{U^n}{\Delta x} (e^{ikj\Delta x} - e^{ik(j-1)\Delta x}) \\ \text{左辺} &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + c \frac{U^n}{\Delta x} (1 - e^{-ik\Delta x}) = 0. \end{aligned}$$

U^{n+1} について解くと,

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= \left(1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) U^n + c \frac{\Delta t}{\Delta x} U^n e^{-ik\Delta x} \\ &= (1 - \mu)U^n + \mu U^n e^{-ik\Delta x}. \end{aligned} \quad (18)$$

ここで, U^n の $n \rightarrow \infty$ の挙動を知るために, 増幅係数 (amplification factor) λ を次のように定義し, 導入する.

$$\lambda \equiv \frac{U^{n+1}}{U^n}. \quad (19)$$

(19) 式より,

$$|U^{n+1}| = |\lambda| |U^n|.$$

同様にして $|U^n|$ を展開していくと,

$$\begin{aligned} |U^n| &= |\lambda| |U^{n-1}| \\ &= |\lambda| |\lambda| \cdots |U^0| \\ &= |\lambda|^n |U^0| \end{aligned} \tag{20}$$

となる. 安定性の条件は, B をとある有限の値としたとき, すべての k に対して,

$$|U^n| = |\lambda|^n |U^0| < B,$$

となることである. よって,

$$|\lambda|^n < \frac{B}{|U^0|}.$$

両辺対数を取り, その右辺を B' と定義すると,

$$n \ln |\lambda| < \ln \frac{B}{|U^0|} \equiv B'.$$

時刻は $t = n\Delta t$ と表されるので,

$$\ln |\lambda| < \frac{B'}{t} \Delta t, \tag{21}$$

と変形できる. ここで, 有限時間で数値解が有界となる条件を考える. このとき (21) 式は,

$$\ln |\lambda| \leq O(\Delta t).$$

また, 増幅係数の大きさは高々1程度だと考え, λ を次のように再定義する.

$$\lambda \equiv 1 + \delta.$$

δ が微小量るとき $\ln(1 + \delta)$ を $\delta = 0$ のまわりで展開すると,

$$\begin{aligned} \ln(1 + \delta) &= \ln(1) + \delta - \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^3 + \cdots \\ &\approx \delta. \end{aligned}$$

よって, 安定性の条件 (21) 式は,

$$\delta \leq O(\Delta t),$$

または,

$$|\lambda| \leq 1 + O(\Delta t) \tag{22}$$

となる。(22) 式の条件は, 数値解がゆっくりと指数的に増幅することを許容する. しかし, 物理的にはそのような解は許されない. したがって, (22) 式の代わりに,

$$|\lambda| \leq 1, \quad (23)$$

を安定性の条件とする⁶⁾. これをフォンノイマンの安定性条件という.

安定性条件が分かったので, 実際に (18) 式のように離散化した場合の増幅係数 λ を求める. (18) 式において, $U^{n+1} = \lambda U^n$ と置き換えると,

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - \mu + \mu e^{-ik\Delta x} \\ &= 1 + \mu(e^{-ik\Delta x} - 1). \end{aligned} \quad (24)$$

(24) 式を 2 乗すると,

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 &= \lambda \cdot \lambda^* \\ &= \{1 + \mu(e^{-ik\Delta x} - 1)\} \{1 + \mu(e^{ik\Delta x} - 1)\} \\ &= 1 + \mu(e^{-ik\Delta x} - 1) + \mu(e^{ik\Delta x} - 1) + \mu^2(e^{ik\Delta x} - 1)(e^{-ik\Delta x} - 1) \\ &= 1 + 2\mu(\cos k\Delta x - 1) + \mu^2(2 - 2\cos k\Delta x) \\ &= 1 - 2\mu(1 - \cos k\Delta x)(1 - \mu). \end{aligned} \quad (25)$$

⁶⁾(24) を安定性条件とすることを時間微分をオイラー法で差分して考える.
 U^{n+1} をオイラー法で解くと

$$U^{n+1} \approx U^n + \left. \frac{dU}{dt} \right|_n \Delta t.$$

ここで (20) 式より

$$\begin{aligned} \lambda U^n - U^n &\approx \left. \frac{dU}{dt} \right|_n \Delta t, \\ \left. \frac{dU}{dt} \right|_n &\approx \frac{(\lambda - 1)}{\Delta t} U^n. \end{aligned}$$

これを解くと

$$U^n \approx U^0 e^{\frac{\lambda-1}{\Delta t} n \Delta t}.$$

ここで $\lambda = 1 + O(\Delta t)$ とすると,

$$U^n = U^0 e^{\frac{O(\Delta t)}{\Delta t} n \Delta t}.$$

これは $\frac{O(\Delta t)}{\Delta t} > 1$ のときに指数的に増幅してしまう. 確実に減衰するためには

$$\begin{aligned} \frac{\lambda - 1}{\Delta t} &\leq 0, \\ \lambda - 1 &\leq 0, \\ \lambda &\leq 1 \end{aligned}$$

の必要がある. よって $|\lambda| \leq 1$ が安定条件である.

ゆえに, $|\lambda|^2 \leq 1$ であるためには, $1 - \mu \geq 0$ でなければならない.

(25) 式で記述される $|\lambda|^2$ の性質を考察する. $k\Delta x$ を固定して, $0 \leq \mu \leq 1$ で $|\lambda|^2$ がどう変化するかを考える. $|\lambda|^2$ を μ の関数としてみると, $|\lambda|^2$ は μ の 2 次関数であり, その極値は,

$$\frac{d|\lambda|^2}{d\mu} = 0,$$

となる μ であたえられる.

$$\frac{d|\lambda|^2}{d\mu} = -2(1 - 2\mu)(1 - \cos k\Delta x),$$

であるから, $\mu = 1/2$ で極小値をとり, 曲線の傾きは $k\Delta x$ が大きいほど, すなわち波長が短くなるほど大きくなる. 有限差分法の基礎 (1) より数値解が表現可能な最小波長は $2\Delta x$ であり, このとき $|\lambda|^2 = 0$ となる.

図 3 からわかるとおり, μ を固定すると短波長成分ほど増幅係数は小さい. 例えば $\mu = 1/2$ にすると $L = 2\Delta x$ の成分は 1 ステップの計算でゼロになる.

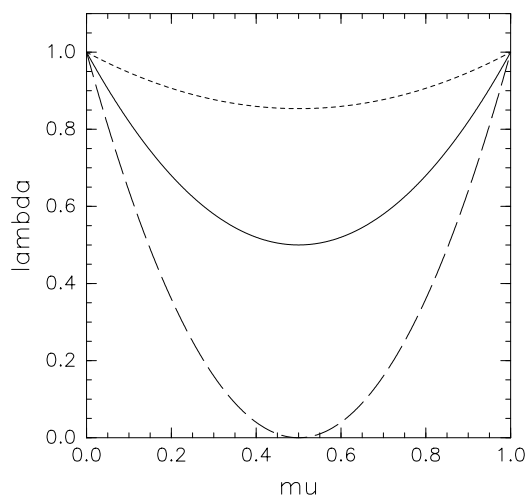


図 3: (25) 式に関する波長と増幅係数の関係. 縦軸は $|\lambda|^2$, 横軸は μ である. 破線は $L = 2\Delta x$, 実線は $L = 4\Delta x$, 点線は $L = 8\Delta x$ の場合である.

付録 1: コーシー・シュワルツの不等式

コーシー・シュワルツの不等式

$$\sum ab \leq \sqrt{\sum a^2} \sqrt{\sum b^2}.$$

を証明する.

ある恒等的に 0 でない数列 a_k, b_k があるとき

$$(t \cdot a_k - b_k)^2 \geq 0 \quad (26)$$

である. ここで t は任意の数である. そのため, この $k = 0$ から n までの総和

$$\sum_{k=0}^n (t \cdot a_k - b_k)^2 \geq 0 \quad (27)$$

も成立する. 今, 左辺を展開すると,

$$\sum_{k=0}^n (t \cdot a_k - b_k)^2 = \sum_{k=0}^n [t^2(a_k)^2 - 2ta_k b_k + (b_k)^2] \geq 0 \quad (28)$$

である.

a_k, b_k の取り方によらず (28) 式が満たされるためには t の 2 次方程式

$$t^2(a_k)^2 - 2ta_k b_k + (b_k)^2 = 0 \quad (29)$$

が常に重解か虚数解でなければならない. 今,

$$\sum_{k=0}^n (a_k)^2 > 0$$

より, 判別式

$$D = \left(2 \sum_{k=0}^n a_k b_k \right)^2 - 4 \sum_{k=0}^n (a_k)^2 \cdot \sum_{k=0}^n (b_k)^2 \leq 0 \quad (30)$$

を満たす. よって,

$$4 \left(\sum_{k=0}^n a_k b_k \right)^2 \leq 4 \sum_{k=0}^n (a_k)^2 \cdot \sum_{k=0}^n (b_k)^2,$$

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n (a_k)^2} \sqrt{\sum_{k=0}^n (b_k)^2} \quad (31)$$

となる. $n \rightarrow \infty$ の極限をとっても (31) 式と同様の関係が成り立つので

$$\sum ab \leq \sqrt{\sum a^2} \sqrt{\sum b^2}. \quad (32)$$

参考文献

川畑 拓哉, 2011, 「有限差分法の基礎 (1)」

URL:http://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/~gfdlab/comptech/resume/0630/2011_0630-takuya.pdf

Mesinger, F., and Arakawa, A., 1976, Numerical methods used in atmospheric models, GARP Publications series (World Meteorological Organization), No. 17, Part 1., 64 pp

石岡 圭一, 2004, 「スペクトル法による数値計算入門」, 東京大学出版会, pp230

川畑 拓也, 2010, 「有限差分法による 1 次元線形移流方程式の数値計算」, pp94

URL:http://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/~psg/doc2011/takuya_B/takuya_B.pdf

たろさん, 2009, 「コーシー・シュワルツの積分不等式」

URL:<http://www.aksystem.jp/math/Schwarz/Schwarz.htm>

(有) りるらる, 2006, 「CHALLENGE from the VOID:コーシー・シュワルツの不等式 - 理工系大学入試問題研究 (東大・東工大・京大・早慶)」

URL:<http://www.cf21.com/archives/50618950.html>