

このノートは伊理正夫・藤野和建著「数値計算の常識」(以下, 伊理テキスト)の第1章を主に参考にしている.

誤差の定義と蓄積

1.1 誤差の定義

量 x の測定値 a に見込まれる誤差が $\Delta a (> 0)$ であるというときには,

$$a - \Delta a < x < a + \Delta a$$

であることを意味し,

$$x = a \pm \Delta a \tag{1.1}$$

と表記する¹⁾. この Δa を x の絶対誤差という. 実数 x, y の関数として計算される量 $z = f(x, y)$ を考える. y, z の測定値をそれぞれ b, c , 絶対誤差をそれぞれ $\Delta b, \Delta c$ とすると,

$$y = b \pm \Delta b, z = c \pm \Delta c \tag{1.2}$$

と表せる. ここで,

$$c = f(a, b) \tag{1.3}$$

¹⁾開区間と閉区間の表記法は以下のとおりである.

開区間 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$

閉区間 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$

左閉右开区間, 左閉半开区間 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$

左開右閉区間, 右閉半开区間 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$

であり, Δc の取りうる最大値は

$$\begin{aligned}
 (\text{誤差の大きさ}) &= |f(a \pm \Delta a, b \pm \Delta b) - f(a, b)| \\
 &= \left| \left(f(a, b) \pm \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{x=a, y=b} \Delta a \pm \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} \Delta b + \dots \right) - f(a, b) \right| \\
 &= \left| \pm \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{x=a, y=b} \Delta a \pm \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} \Delta b + \dots \right| \\
 &\simeq \left| \pm \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{x=a, y=b} \Delta a \pm \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} \Delta b \right| \\
 &\leq \left| \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{x=a, y=b} \right| \Delta a + \left| \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} \right| \Delta b
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

と表すことができる. ただし, $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ はあまり大きくないと想定している²⁾.

誤差の蓄積

足し算と掛け算では誤差の蓄積の仕方が異なる. $z = x \pm y$ のとき, z の誤差の最大値 Δc は

$$\begin{aligned}
 \Delta c &= \left| \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{x=a, y=b} \right| \Delta a + \left| \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} \right| \Delta b \\
 &= \Delta a + \Delta b
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

となる. つまり, 絶対誤差 Δc は x, y の絶対誤差 $\Delta a, \Delta b$ の和となる. また, $z = xy$ のとき,

$$\begin{aligned}
 \Delta c &= \left| \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{x=a, y=b} \right| \Delta a + \left| \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} \right| \Delta b \\
 &= b\Delta a + a\Delta b
 \end{aligned}$$

すなわち,

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \tag{1.6}$$

となり, z の相対誤差³⁾ $\frac{\Delta c}{c}$ は x, y の相対誤差 $\frac{\Delta a}{a}, \frac{\Delta b}{b}$ の和となっていることがわかる.

²⁾1 より小さい値.

³⁾測定値に対する絶対誤差の比.

参考文献

伊理正夫・藤野和建, 1985: 数値計算の常識, 共立出版