

第 12 章 球面のスペクトル法

*1

スペクトル法を用いて偏微分方程式を解く場合, 境界条件に適した展開関数を選ぶ必要がある. 展開関数としては, 直交性を持つ調和関数を用いる.

球座標系で記述された偏微分方程式を解く場合, 展開関数として球面調和関数 (spherical harmonics) を用いる. 以下では球面上の問題を解くことを念頭におき, 空間方向の独立変数は (λ, φ) とする*2.

12.1 球面調和関数展開

$g(\lambda, \mu = \sin \varphi)$ を球面調和関数 $Y_n^m(\lambda, \mu)$ で展開する.

$$\begin{aligned} g(\lambda, \mu) &= \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n S_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) \\ &= S_0^0 Y_0^0 + \sum_{m=-1}^1 S_1^m Y_1^m + \sum_{m=-2}^2 S_2^m Y_2^m + \cdots + \sum_{m=-M}^M S_M^m Y_M^m. \end{aligned}$$

M を切断波数という. Y_n^m はルジャンドル陪関数を用いて,

$$Y_n^m = Y_n^m(\lambda, \mu) \tag{1.1}$$

$$= P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \tag{1.2}$$

*1本ノートは, 筆者が自身の手書きノートから大量の数式を tex 化することに憂鬱になっていたところへ, それを不憚に思った川畑氏が tex による口述筆記記録を提供してくれたことで出来たものである. この場を借りて深く感謝するとともに, 自分もそれくらい使いこなせないとなあと自戒するものである.

*2ここでいう λ は経度に相当し, φ は緯度に相当する座標軸である.

$Y_n^{-m} = P_n^{-m} e^{-im\lambda}$, $P_n^{-m} = P_n^m$ なので,

$$Y_n^{-m} = P_n^m e^{-im\lambda} \quad (1.3)$$

$$= \{Y_n^m\}^*. \quad (1.4)$$

$g(\lambda, \mu)$ は実関数とすると,

$$S_n^{-m} = \{S_n^m\}^* \quad (1.5)$$

という関係をみだす必要がある. 具体的に $n = 1$ のとき,

$$\sum_{m=-1}^1 S_1^m Y_1^m = S_1^{-1} Y_1^{-1} + S_1^0 Y_1^0 + S_1^1 + Y_1^1 \quad (1.6)$$

$$= \{S_1^1 Y_1^1\}^* + S_1^0 Y_1^0 + S_1^1 + Y_1^1 \quad (1.7)$$

$$= 2\text{Re}[S_1^1 Y_1^1] + S_1^0 Y_1^0. \quad (1.8)$$

Y_1^0 は実関数なので, S_1^0 は実数である. 以上の関係から,

- S_n^m は $m \geq 0$ の範囲だけ求めれば良い
- S_n^0 は実数

12.1.1 球面調和関数とルジャンドル陪関数

$Y_n^m(\lambda, \mu)$ は球面上の水平ラプラス演算子,

$$\nabla^2 = \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} \quad (1.9)$$

の固有関数,

$$\nabla^2 Y_n^m(\lambda, \mu) = -n(n+1) Y_n^m(\lambda, \mu). \quad (1.10)$$

ここで, $Y_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu) e^{im\lambda}$ である. $P_n^m(\mu)$ は 2 に正規化されたルジャンドル陪関数,

$$P_n^m = \sqrt{(2n+1) \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{1}{2^n n!}} (1-\mu^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{n+|m|}}{d\mu^{n+|m|}} (\mu^2-1)^n \quad (n \geq m). \quad (1.11)$$

直交性

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n'}^m(\mu) d\mu = \delta_{nn'} \quad (1.12)$$

これより,

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_n^m(\lambda, \mu) \{Y_{n'}^{m'}(\lambda, \mu)\}^* d\mu d\lambda = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (1.13)$$

P_n^m は n の数が増えるごとに節 (零点) の数が増える. Y_n^m は

- m : 経度方向の節の数
- $n - m$: 緯度方向の節の数

12.1.2 ルジャンドル陪関数と漸化式

$P_n^m(\mu)$ はルジャンドルの陪微分方程式の固有関数である.

$$\left[\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} \right\} - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] P_n^m(\mu) = -n(n+1) P_n^m(\mu). \quad (1.14)$$

$P_n^m(\mu)$ は $[-1, 1]$ で有界である. P_n^m の昇降演算子,

$$P_n^m = \sqrt{\frac{2n+1}{(2n-1)(n^2-m^2)}} \left\{ n\mu - (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} \right\} P_{n-1}^m, \quad (1.15)$$

$$P_{n-1}^m = \sqrt{\frac{2n-1}{(2n+1)(n^2-m^2)}} \left\{ n\mu + (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} \right\} P_n^m. \quad (1.16)$$

これらを組み合わせると, 元のルジャンドルの陪微分方程式が得られる.

昇降演算子を基に, もっと便利な漸化式を求める. 上昇演算子より,

$$P_{n+1}^m = \sqrt{\frac{2n+3}{(2n+1)((n+1)^2-m^2)}} \left\{ (n+1)\mu - (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} \right\} P_n^m. \quad (1.17)$$

下降演算子を用いて $(1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n^m$ を消去する.

$$\sqrt{\frac{(2n+1)((n+1)^2-m^2)}{2n+3}} P_{n+1}^m + \sqrt{\frac{(2n+1)(n^2-m^2)}{2n-1}} P_{n-1}^m = (2n+1)\mu P_n^m. \quad (1.18)$$

ゆえに,

$$\sqrt{\frac{(n^2-m^2)}{(2n-1)(2n+1)}} P_{n-1}^m + \sqrt{\frac{((n+1)^2-m^2)}{(2n+1)(2n+3)}} P_{n+1}^m = \mu P_n^m. \quad (1.19)$$

下降演算子を用いて μP_n^m を消去した場合は P_n^m の微分が得られる.

$$(n+1) \sqrt{\frac{(n^2-m^2)}{(2n-1)(2n+1)}} P_{n-1}^m + n \sqrt{\frac{((n+1)^2-m^2)}{(2n+1)(2n+3)}} P_{n+1}^m = (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n^m. \quad (1.20)$$

12.2 ルジャンドル多項式とガウス-ルジャンドル積分公式

12.2.1 ルジャンドル多項式の性質

$P_n^m(\mu)$ の $m = 0$ としたものはルジャンドル多項式と呼ばれる。これを $P_n(\mu)$ と表す。以下では $\sqrt{2n+1}$ で正規化されているとする。漸化式はルジャンドル陪関数の漸化式に $m = 0$ を代入して得られる。

$$\frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}P_{n-1} + \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}P_{n+1} = \mu P_n \quad (2.21)$$

12.2.2 クリストッフエル-ダルブーの公式

$$(x-y) \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x)P_k(y) = \frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+3)}} \{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_n(y)P_{n-1}(x)\} \quad (2.22)$$

12.2.3 ガウス-ルジャンドルの積分公式

クリストッフエル-ダルブーの公式を用いることで証明される。

ガウス-ルジャンドルの積分公式

$f(\mu)$ が $(2n-1)$ 次以下の多項式であるとき、

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu = \sum_{k=1}^n w_k f(\mu_k) \quad (2.23)$$

ここで μ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) は $P_n(\mu)$ の n 個の零点で

$$-1 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < 1 \quad (2.24)$$

とおく。 w_k はガウス重みと呼ばれる量で、

$$w_k = \int_{-1}^1 \frac{P_n(\mu)}{(\mu - \mu_k)P_n'(\mu_k)} d\mu \quad (2.25)$$

$$= \frac{2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{nP_{n-1}(\mu_k)P_n'(\mu_k)}. \quad (2.26)$$

証明)

$f(\mu)$ は $(2n - 1)$ 次の多項式なので, $P_n(\mu)$ と $(n - 1)$ 次以下の多項式 $Q(\mu)$, $R(\mu)$ を用いて,

$$f(\mu) = P_n(\mu)Q(\mu) + R(\mu) \quad (2.27)$$

と表すことができる. すると,

$$\int_{-1}^1 f(\mu)d\mu = \int_{-1}^1 \{P_n(\mu)Q(\mu) + R(\mu)\}d\mu. \quad (2.28)$$

$P_n(\mu)$ の直交性から, $\int_{-1}^1 P_n(\mu)Q(\mu)d\mu = 0$ ($Q(\mu)$ は $(n - 1)$ 次の多項式だから) となる. ゆえに,

$$\int_{-1}^1 f(\mu)d\mu = \int_{-1}^1 R(\mu)d\mu. \quad (2.29)$$

$R(\mu)$ は $(n - 1)$ 次以下の多項式なので n 個の $(\mu_k, R(\mu_k))$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を通るラグランジュ補間多項式で表せる.

$$R(\mu) = \sum_{k=1}^n R(\mu_k)l_k(\mu). \quad (2.30)$$

$l_k(\mu)$ は $l_k(\mu_j) = \delta_{kj}$ を満たす $(n - 1)$ 次多項式

$$l_k(\mu) = \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{\mu - \mu_i}{\mu_k - \mu_i}. \quad (i \neq k) \quad (2.31)$$

これらを用いると,

$$\int_{-1}^1 f(\mu)d\mu = \int_{-1}^1 R(\mu)d\mu \quad (2.32)$$

$$= \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{k=1}^n R(\mu_k)l_k(\mu) \right\} d\mu \quad (2.33)$$

$$= \sum_{k=1}^n R(\mu_k) \int_{-1}^1 l_k(\mu)d\mu \quad (2.34)$$

$$= \sum_{k=1}^n R(\mu_k)w_k \quad (2.35)$$

$$= \sum_{k=1}^n w_k (P_n(\mu_k)Q(\mu_k) + R(\mu_k)) \quad (P_n(\mu_k) = 0) \quad (2.36)$$

$$= \sum_{k=1}^n w_k f(\mu_k) \quad (2.37)$$

$$P_n(\mu) = c(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) \cdots (\mu - \mu_n) \quad (2.38)$$

$$= c \prod_{k=1}^n (\mu - \mu_k) \quad (2.39)$$

$$P'_n(\mu) = c[(\mu - \mu_2) \cdots (\mu - \mu_n) + (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) \cdots (\mu - \mu_n) \quad (2.40)$$

$$+ \cdots + (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) \cdots (\mu - \mu_{n-1})] \quad (2.41)$$

$$P'_n(\mu_k) = c(\mu_k - \mu_1)(\mu_k - \mu_2) \cdots (\mu_k - \mu_{k-1})(\mu_k - \mu_{k+1}) \cdots (\mu_k - \mu_n). \quad (2.42)$$

ゆえに,

$$l_k(\mu) = \frac{P_n(\mu)}{c(\mu - \mu_k)} \frac{c}{P'_n(\mu_k)} \quad (2.43)$$

$$= \frac{P_n(\mu)}{(\mu - \mu_k)P'_n(\mu_k)} \quad (2.44)$$

よって,

$$w_k = \int_{-1}^1 \frac{P_n(\mu)}{(\mu - \mu_k)P'_n(\mu_k)} d\mu \quad (2.45)$$

さらに, クリストッフエル-ダルブーの公式で $x = \mu, y = \mu_k$ とおくと,

$$(\mu - \mu_k) \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\mu)P_k(\mu_k) = \frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} \{P_n(\mu)P_{n-1}(\mu_k) - P_n(\mu_k)P_{n-1}(\mu)\} \quad (2.46)$$

$$= \frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} P_n(\mu)P_{n-1}(\mu_k). \quad (2.47)$$

ゆえに,

$$\frac{P_n(\mu)}{\mu - \mu_k} = \frac{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{nP_{n-1}(\mu_k)} \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\mu)P_k(\mu_k). \quad (2.48)$$

これより,

$$w_k = \int_{-1}^1 \left(\frac{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{nP_{n-1}(\mu_k)} \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\mu)P_k(\mu_k) \right) \frac{1}{P'_k} d\mu \quad (2.49)$$

$$= \frac{1}{P'_k} \frac{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{nP_{n-1}(\mu_k)} \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\mu)P_k(\mu_k) d\mu \quad (2.50)$$

$$= \frac{2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{nP_{n-1}(\mu_k)P'_n(\mu_k)} \quad (2.51)$$