付録 1　1 次元移流方程式の数値解法 (オイラースキーム)

関数 $u = u(x,t)$ を考えると, 1 次元線形移流方程式は (a. 1) で表される.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad c = \mathrm{const.} \tag{a. 1}$$

ここでは, 時間方向に前進差分を, 空間方向に中央差分を用いて (a. 1) を数値的に解く[1]. ちなみに, (a. 1) の解析解は $u(x,t) = f(x - ct)$ という形をしている[2].

上記の差分法を用いて (a. 1) を差分化すると,

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

となり, これが解くべき差分式である. 以下の図は計算結果を可視化したものである. 格子間隔 Δx は $\Delta x = 0.33$, 時間間隔 Δt は $\Delta t = 0.01$ である. また, 境界条件は周期境界条件 $u_{-1} = u_n$ を用い, $c = 10$ とした.

解析解であれば, $t = 0$ での矩形が維持されたまま x 軸正方向へ伝播するはずである. しかし, 図を見てもらえばわかるように, 時間ステップの増加とともに波形は崩れている. これはフォンノイマンの安定性解析から考察すると, 次のような理由によるものだろうと考えられる. すなわち, 解を $u_j^n = \mathrm{Re}[U(t)e^{ik\Delta x}]$ と仮定し, 差分式に代入して整理すると,

$$U^{n+1} = \left(1 - ic\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x\right)U^n.$$

増幅係数 $\lambda = U^{n+1}/U^n$ の大きさは,

$$\begin{aligned}
|\lambda| &= \sqrt{\lambda\lambda^*} \\
&= \sqrt{\left(1 - ic\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x\right)\left(1 + ic\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x\right)} \\
&= \sqrt{1 + \left(c\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 k\Delta x}
\end{aligned}$$

ゆえに, 増幅係数が常に $|\lambda| > 1$ となるため不安定になると考えられる.

[1] この様な差分のとり方をするスキームを FTCS(Front Time Center Space) 法と言うこともある.

[2] $u(x,t) = f(x - ct)$ が (a. 1) の解であることを確かめる. 実際に $f(x - ct)$ を (a. 1) に代入し合成関数の微分に注意して計算すれば,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = -cf'(x - ct) + cf'(x - ct) = 0.$$

ゆえに, $f(x - ct)$ は (a. 1) の解である.

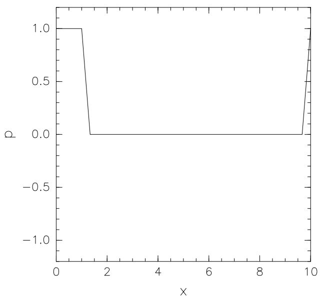

図 2.1: 初期状態

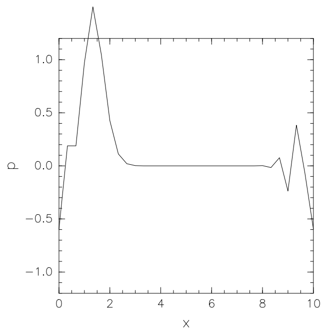

図 2.2: 1 次元移流方程式の解 (t = 0.1 のとき)

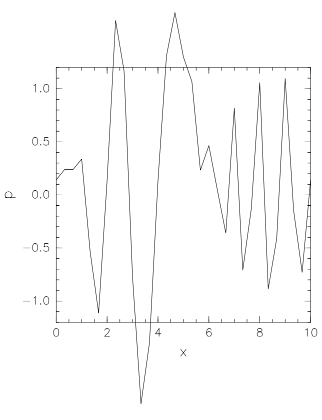

図 2.3: 1 次元移流方程式の解 (t = 0.5 のとき)

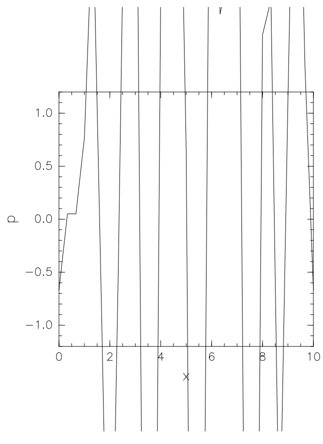

図 2.4: 1 次元移流方程式の解 (t= 1.0 のとき)