常微分方程式の初期値問題

古くは弾道計算にはじまり, 近頃ではロケットの軌道計算まで, 常微分方程式の初期値問題として定式化される実際問題はきわめて多い. そしてそれらの問題のほとんどは解析的に解くことが不可能あるいは困難なため, 数値解法を用いざるを得ない.

上述の通り古くから需要があったこともあり, 本格的な数値解法の研究は一世紀以上の歴史がある. 研究に伴いその技術も高度に分化しているため, 全貌を知るのは容易ではない.

その一方で, とりあえずオイラー法があれば十分であるとの考え方や, とりあえずルンゲ・クッタ法[1)]を使えば高精度解が得られるという考え方, さらには古典的なミルン法[2)]が改変されないまま用いられていたりという狭量な見識が多いというのもまた事実である.

実際の問題では適切な解法を用いて解くべきであるが, 本ノートでは狭量な見識に囚われたり, 分化した技術を取り入れる上で常微分方程式の初期値問題の基礎を学ぶ.

常微分方程式の初期値問題

t を独立変数, t の未知関数 (従属変数) を $x(t)$ とする. このとき, 微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), t) \text{ ただし } (a \le t \le b) \tag{1}$$

および初期条件

$$x(a) = x_0 \tag{2}$$

1) オイラー法よりさらにテイラー展開の高次の項まで一致させる方法.

2) 何らかの方法で数値解を求めてさらに精度がよい数値解法で再計算する方法である予測子・修正子法の一種.

を与えて関数 $x(t)$ $(a \le t \le b)$ を求めるというような問題が常微分方程式の初期値問題である.

関数 $f(x,t)$ が滑らかな関数[3] ならば, (1) 式と (2) 式を満たすような関数 $x(t)$ が一意に定まる.

連立常微分方程式[4]の場合も基本的な考え方は一緒である.

$$\frac{d}{dt}x^i(t) = f^i(x^1(t), x^2(t)\ldots x^m, t) \text{ ただし } (a \le t \le b)(i = 1, \ldots, m) \tag{3}$$

および初期条件

$$x^i(a) = x_0^i \tag{4}$$

を与えて関数 $x^i(t)$ $(a \le t \le b)$ を求めるという問題は初期値問題として解くことができる.

さらに高階の微分方程式[5] も, 複数階微分の項そのものを変数として置き換えてしまえば, 一階の連立常微分方程式の初期値問題として帰着できる. 例えば

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3} = f\left(x, \frac{dx(t)}{dt}, \frac{d^2x(t)}{dt^2}, t\right) \tag{5}$$

という式を考える. このときも未知関数を増やして

$$\begin{aligned} x^1(t) &= x(t), \\ x^2(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \\ x^3(t) &= \frac{d^2x(t)}{dt^2} \end{aligned} \tag{6}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{dx^1(t)}{dt} &= x^2(t), \\ \frac{dx^2(t)}{dt} &= x^3(t), \\ \frac{dx^3(t)}{dt} &= f(x^1(t), x^2(t), x^3(t), t) \end{aligned}$$

という１階の連立方程式 (3) 式と同じになる. もし与えられた微分方程式が最高階

[3] δ 関数等の不連続関数ではなく必要な回数だけ微分可能な関数. 詳しくは「微分方程式入門」学術図書出版社 松澤忠人 (1996) 47-48p 参照

[4] 関数 x が複数あるような微分方程式.

[5] 複数階微分の項を含む微分方程式

の導関数に関して解けた形になっていないときは[6]その最高階の導関数に関して「数値的に解く」サブルーチンを用意すればよい[7].

参考文献

伊理正夫, 藤野和建, 1985,「数値計算の常識」 共立出版, ISBN 4320013433

[6]例えば初期値 $x(0) = x_0$ と与えられている時

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sin\left(\frac{dx(t)}{dt} + x(t)\right)$$

などの式. この式は単純に解析的には解けなし, 数値的にも難しい. この式を解くにはニュートン法を使うなどの工夫が必要である. 具体的な手順は, まず $t = 0$ のとき $\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = x'$ とする. このとき初期値 x_0 を用いて

$$f(x') = x' - \sin(x' + x_0)$$

の $f(x') = 0$ の解をニュートン法で求める. 次にその値を使って数値積分をする (今回はオイラー法を用いる).

$$x_1 = x_0 + \left.\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)\right|_{t=0} h.$$

また x_1 の値を用いて同様にやると求められる

[7]ニュートン法などの数値積分以外の数値解法.