10.2　数値分散

一次元線形移流方程式を数値的に解くと, 使用する空間差分法によっては「数値分散」という現象が現れる. ここでは数値分散とその仕組みに関して解説する. 元の方程式について考える.

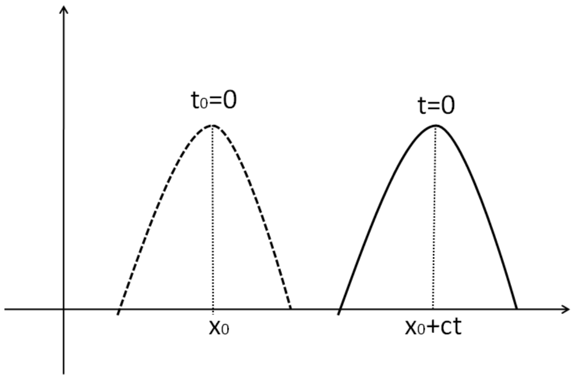

図 10.2.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{10.2.1}$$

$u(x, t)$ をフーリエ展開し, そのとある波数成分の解,

$$u(x, t) = Re[U(t)e^{ikx}] \tag{10.2.2}$$

について考える. これを (10.2.1) に代入すると $U(t)$ の満たす式

$$\frac{dU(t)}{dt} + ikcU(t) = 0 \tag{10.2.3}$$

を得る. この式は振動方程式

$$\frac{dU(t)}{dt} + \nu U(t) = 0$$

と同じ形をしている.　位相速度 c_{ph} は定義から,

$$c_{ph} \equiv \frac{\nu}{k} = \frac{kc}{k} = c.$$

以上のように, 元の式 (連続形の式) では分散性はない. (位相速度は波形によらない.)

次に, 空間微分のみ差分化した式

$$\frac{\partial u_j(t)}{\partial t} + c\frac{\partial u_{j+1} - u_{j-1}}{\partial 2\Delta x} = 0 \tag{10.2.4}$$

について考える. ここで, 空間微分を中心差分で表した (10.2.4) の時間微分を適当な方法で差分化すると, 元の (10.2.1) の有限差分法が得られる.

ex) オイラー法を用いると

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \tag{10.2.5}$$

(10.2.4) は (10.2.5) における $\Delta t \to 0$ の極限になっている.

連続形の式 (10.2.1) について考察したのと同様に, (10.2.4) に対し,

$$u_j(t) = Re[U_j(t)e^{ikj\Delta x}]$$

を代入する. この時, $U_j(t)$ の満たす式として

$$\frac{dU_j}{dt} + ik\left(c\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}\right)u_j = 0 \tag{10.2.6}$$

$\nu^* = k\left(c\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}\right)$ と置くと位相速度 c_p^*h は

$$c_p^*h = \frac{\nu^*}{k} = c\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \tag{10.2.7}$$

となる. 位相速度は波数 k に依存するため, (10.2.4) の解には分散性がある. 離散化したことにより, 解に分散性が現れることを数値分散とよぶ.
(10.2.4) の k 依存性を調べる. $k\Delta x$ が 0 から増加するにつれ c_{ph}^* は単調減少する. 解像可能な最小波長の成分 $(\lambda = 2\Delta x)$ に対し, $c_{ph}^* = 0$ になる. ($k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\Delta x}$)

まとめると
・どの波数成分の位相速度も解析値よりも小さい
・$\lambda = 2\Delta x$ の成分の位相速度は 0 (定常波になる)

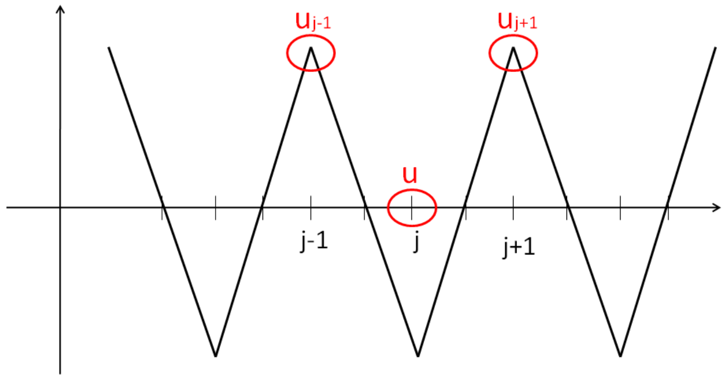

図 10.2.2:

次に (10.2.7) の解の群速度を計算する. 定義から群速度 c_g は

$$c_g = \frac{d\nu}{dk}$$

連続形の式 (10.2.3) では $\nu = kc$ なので,

$$c_g \equiv \frac{dkc}{dk} = c$$

となる. 一方,

$$\nu^* = kc^* = k\left(c\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}\right)$$

より, (10.2.6) の解の群速度 c_g^* は

$$\begin{aligned} c_g^* &= \frac{d}{dk}\left(c\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}\right) \\ &= c\cos k\Delta x \end{aligned} \tag{10.2.8}$$

となる.

$k\Delta x$ が　0 から増加するとともに c_g^* は単調減少し,
$k\Delta x = \frac{\pi}{2}(k = 4\Delta x)$ の時, $c_g = 0$
$k\Delta x = \pi(k = 2\Delta x)$ の時, $c_g = 0$ となる.

群速度の分散性の具体例

空間的に滑らかな関数 $Y(x)$ を考える. (例えば波長の長い正弦波) $Y(x)$ を空間方向に離散化したものを Y_j とし,

$$Y_j = Y(x)$$

とおく.

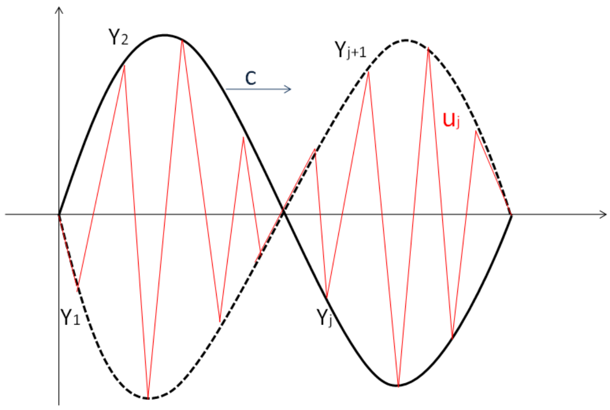

図 10.2.3:

次に Y_j を用いて表される

$$u_j = (-1)^j Y_j \tag{10.2.9}$$

という波を考える. これを (10.2.4) 式

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = 0$$

へ代入すると,

$$\begin{aligned}(-1)^j \frac{\partial Y_j}{\partial t} + c\frac{(-1)^{j+1}Y_{j+1} - (-1)^{j-1}Y_{j-1}}{2\Delta x} &= 0 \\ \frac{\partial Y_j}{\partial t} - c\frac{Y_{j+1} - Y_{j-1}}{2\Delta x} &= 0\end{aligned}$$

したがって, (10.2.9) で定義された u_j は $-c$ で移流される.
(x の負の方向に移流される.)

(10.2.4) に戻り, その解析解を考える.

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = 0$$

無次元座標 τ を導入する.

$$\tau = \frac{ct}{\Delta x} \tag{10.2.10}$$

(10.2.4) を $\frac{c}{2\Delta t}$ で割り,

$$\frac{\partial u_j}{\partial\left(\frac{c}{2\Delta x}\right)} + (u_{j+1} - u_{j-1}) = 0$$

$$2\frac{\partial u_j}{\partial \tau} = u_{j-1}(\tau) - u_{j+1}(\tau) \tag{10.2.11}$$

(10.2.11) は第一種ベッセル関数の満たす漸化式に等しい. j 次の第一種ベッセル関数を J_j と表すと,

$$u_j(\tau) = J_j(\tau) \tag{10.2.12}$$

(10.2.4) において $j = 0$ とする点は任意にとることが出来るので一般的には

$$u_j(\tau) = J_{j-p}(\tau)$$

と表される. ここで p は任意の整数である. (10.2.4) は線形方程式なので一般解は,

$$u_j(\tau) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p J_{j-p}(\tau). \tag{10.2.13}$$

$\tau = 0$ のとき, J_0 を除く全ての J_k の値は定義より 0 になる. $J_0(\tau = 0) = 1$ より, $\tau = 0$ を (10.2.13) に代入して,

$$u_j(0) = a_j. \tag{10.2.14}$$

a_j は初期条件 $u_j(0)$ より与えられる. 具体例として次のような初期条件を与えた場合を考える.

$$u_j(0) = \begin{cases} 1(j=0) \\ 0(j \neq 0) \end{cases}$$

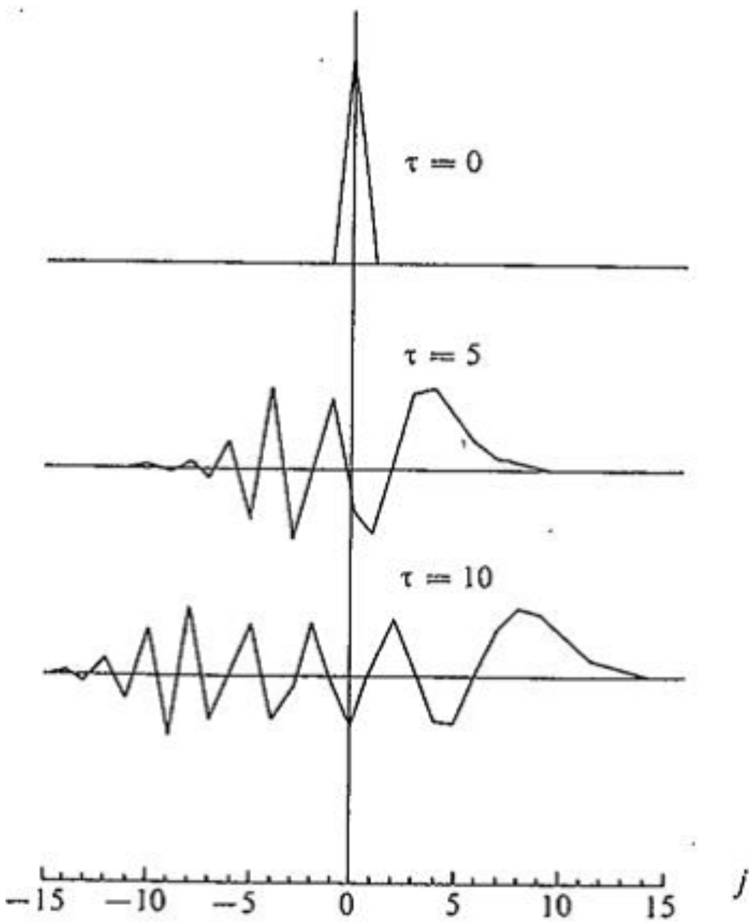

図 10.2.4: 一番上の図を初期条件とした時の (10.2.4) の解析解.

初期条件 $u(x)$ が δ 関数の場合, これをフーリエ余弦展開すると,

$$u(x) = \int_0^\infty a(k)\cos kxdk$$
$$a(k) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty u(x)\cos kxdx$$

δ 関数は

$$\delta(x) = \begin{cases} 1(x=0) \\ 0(x\neq 0) \end{cases}$$

より $a(k)$ を数値的に求めると,

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{2}{\pi}u(j\Delta x)\cos k(j\Delta x)\Delta x \\ &= \frac{2}{\pi}u(0)\cos(0)\Delta x \\ &= \frac{2}{\pi}\Delta x \end{aligned}$$

光学のアナロジーからこの様な擾乱は白色雑音 (white noize) と呼ばれる.