1次元移流方程式の数値解法: 付録2 Runge-Kutta 型スキーム

以下のような1次元移流方程式を, Runge-Kutta 型スキームの3つの方法を用いて解く.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + C\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} &= 0 \qquad \text{(b.1)}\\
U(x,0) &= \cos 2\pi x(0 < x < \frac{1}{4})\\
U(x,0) &= 0.0(1 < x)\\
U(0,t) &= U(L,t)
\end{aligned}
$$

ただし, 今回は $C = 1.0, L = 1.0$ とする.

1　2段2位の改良オイラー法による数値解法

2段2位の改良オイラー法[*1]

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, t_n)\\
k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{1}{2}h)\\
x^{n+1} &= x^n + k_2
\end{aligned}
$$

を用いて (b.1) を Runge-Kutta 型公式に当てはめると,

$$
\begin{aligned}
k_1(i\Delta x, n\Delta t) &= -\Delta t c\frac{U_{i+1}^{n-1} - U_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x}\\
k_2(i\Delta x, n\Delta t) &= -\Delta t c\frac{U_{i+1}^{*} - U_{i-1}^{*}}{2\Delta x}\\
U_i^{n+1} &= U_i^n + k_2(i\Delta x, n\Delta t)
\end{aligned}
$$

となる. ただし空間差分は2次の中心差分を採用しており, Δt はタイムステップ, 下付きの i は空間方向, 上付きの n は時間方向の格子点を表す. また,

$$
\begin{aligned}
U_{i+1}^{*} &= U_{i+1}^{n-1} + k_1(i+1)\\
U_{i-1}^{*} &= U_{i-1}^{n-1} + k_1(i-1)
\end{aligned}
$$

である.

[*1] 導出は ogihara 2011 p44 参照

2 ホイン法 (修正オイラー法) による数値解法

2 段 2 位のホイン法[*2]

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, t_n) \\ k_2 &= hf(x_n + k_1, t_n + h) \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

を用いて (b.1) を Runge-Kutta 型公式に当てはめると,

$$\begin{aligned} k_1(i\Delta x, n\Delta t) &= -\Delta tc\frac{U_{i+1}^{n-1} - U_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x} \\ k_2(i\Delta x, n\Delta t) &= -\Delta tc\frac{U_{i+1}^{*} - U_{i-1}^{*}}{2\Delta x} \\ U_i^{n+1} &= U_i^n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

となる. また,

$$\begin{aligned} U_{i+1}^{*} &= U_{i+1}^{n-1} + \frac{1}{2}k_1(i+1) \\ U_{i-1}^{*} &= U_{i-1}^{n-1} + \frac{1}{2}k_1(i-1) \end{aligned}$$

である.

2.1 蛇足:3 段 3 位のホイン法による数値解法

3 段 3 位であるホインの 3 次公式[*3]

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, t_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{3}k_1, t_n + \frac{1}{3}h) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{2}{3}k_2, t_n + \frac{2}{3}h) \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3) \end{aligned}$$

[*2] 導出は ogihara 2011 p104 参照
[*3] 導出は ogihara 2011 p47 参照

を用いて (b.1) を Runge-Kutta 型公式に当てはめると,

$$
\begin{aligned}
k_1(i\Delta x, n\Delta t) &= -\Delta t c \frac{U_{i+1}^{n-1} - U_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x} \\
k_2(i\Delta x, n\Delta t) &= -\Delta t c \frac{U_{i+1}^{*} - U_{i-1}^{*}}{2\Delta x} \\
k_3(i\Delta x, n\Delta t) &= -\Delta t c \frac{U_{i+1}^{**} - U_{i-1}^{**}}{2\Delta x} \\
U_i^{n+1} &= U_i^n + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3)
\end{aligned}
$$

となる. また,

$$
\begin{aligned}
U_{i+1}^{*} &= U_{i+1}^{n-1} + \frac{1}{3}k_1(i+1) \\
U_{i+1}^{**} &= U_{i+1}^{n-1} + \frac{2}{3}k_2(i+1) \\
U_{i-1}^{*} &= U_{i-1}^{n-1} + \frac{1}{3}k_1(i-1) \\
U_{i-1}^{**} &= U_{i-1}^{n-1} + \frac{2}{3}k_2(i-1)
\end{aligned}
$$

である.

3　4 段 4 位の古典的ルンゲ-クッタ法による数値解法

4 段 4 位である古典的ルンゲ-クッタ法[*4]

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, t_n) \\
k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{1}{2}h) \\
k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}k_2, t_n + \frac{1}{2}h) \\
k_4 &= hf(x_n + k_3, t_n + h) \\
x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
$$

[*4] 導出は ogihara 2011 p52 参照

を用いて (b.1) を Runge-Kutta 型公式に当てはめると,

$$
\begin{aligned}
k_1(i\Delta x, n\Delta t) &= -\Delta t c \frac{U_{i+1}^{n-1} - U_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x} \\
k_2(i\Delta x, n\Delta t) &= -\Delta t c \frac{U_{i+1}^{*} - U_{i-1}^{*}}{2\Delta x} \\
k_3(i\Delta x, n\Delta t) &= -\Delta t c \frac{U_{i+1}^{**} - U_{i-1}^{**}}{2\Delta x} \\
k_4(i\Delta x, n\Delta t) &= -\Delta t c \frac{U_{i+1}^{***} - U_{i-1}^{***}}{2\Delta x} \\
U_i^{n+1} &= U_i^n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
$$

となる. また,

$$
\begin{aligned}
U_{i+1}^{*} &= U_{i+1}^{n-1} + \frac{1}{2}k_1(i+1) \\
U_{i+1}^{**} &= U_{i+1}^{n-1} + \frac{1}{2}k_2(i+1) \\
U_{i+1}^{***} &= U_{i+1}^{n-1} + k_3(i+1) \\
U_{i-1}^{*} &= U_{i-1}^{n-1} + \frac{1}{2}k_1(i-1) \\
U_{i-1}^{**} &= U_{i-1}^{n-1} + \frac{1}{2}k_2(i-1) \\
U_{i-1}^{***} &= U_{i-1}^{n-1} + k_3(i-1)
\end{aligned}
$$

である.