

時間差分スキーム (3)

リープフロッグスキームの安定性と位相

リープフロッグスキームの場合, 2 つの増幅係数 λ_1 と λ_2 が存在する. 時間差分スキーム (2) の (22) 式より振動方程式にリープフロッグスキームを当てはめた差分式は,

$$U^n = a\lambda_1^n U_1^0 + b\lambda_2^n U_2^0.$$

したがって, 安定性条件は,

$$|\lambda_1| < 1,$$

$$|\lambda_2| < 1$$

であることである. 以下では安定性条件を詳しくみるために, 3 つの特別な場合について考える.

Case1. $|p| < 1$ のとき

時間差分スキーム (2) の 2 段階スキームの安定性より, $1 - p^2 > 0$ のときは

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= \sqrt{\lambda_1 \lambda_1^*} = 1, \\ |\lambda_2| &= \sqrt{\lambda_2 \lambda_2^*} = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

よって, $|p| < 1$ のとき, 安定性は中立となる. 位相については,

$$\theta = \arctan\left(\frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}\right)$$

より, 物理モードの位相を θ_1 , 計算モードの位相を θ_2 とすると,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right), \\ \theta_2 &= \arctan\left(-\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

$p \rightarrow 0$ の時の位相の振る舞いについて考える. 右極限 $p \rightarrow +0$ を考えると

$$\tan \theta_1 = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} > 0,$$

$$\tan \theta_2 = -\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} < 0.$$

ゆえに,

$$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \pi.$$

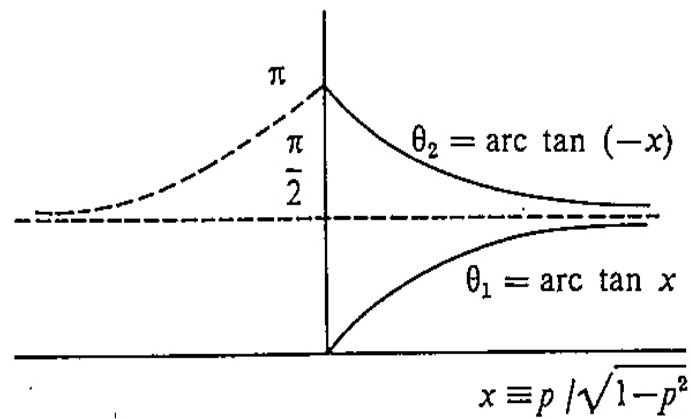


図 1: リーフログスキームにおける物理モードと計算モードの位相の振る舞い (Mesinger and Arakawa (1976) より引用). 縦軸は位相, 横軸は $x = p/\sqrt{1-p^2}$ である.

図 1 より,

$$\theta_2 = \pi - \theta_1.$$

特に, $p \rightarrow 0$ のとき, $\theta_1 \rightarrow p$, $\theta_2 \rightarrow \pi - p$ である. $p = \omega\Delta t$ であるから, $\Delta t \rightarrow 0$ のとき物理モードの位相は真の解の位相に近づくことがわかる. 一方, 計算モードの位相は π ずれてしまう. 同様に $p < 0$ で左極限 $p \rightarrow -0$ を考えると,

$$-\pi < \theta_1 < -\frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < 0$$

であるから,

$$\theta_2 = -\pi - \theta_1.$$

結局, $p \geq 0$ をまとめて表すと,

$$\theta_2 = \pm\pi - \theta_1 \quad (\text{複号同順}) \quad (3)$$

となる.

物理モードの位相 θ_1 の振る舞いは次の通りである. $p \ll 1$ のとき,

$$\theta_1 = \arctan \left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \right)$$

なので,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arctan \left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \right) \\ &\sim \arctan \left\{ p \left(1 + \frac{1}{2!}p^2 + 9\frac{1}{4!}p^4 + \dots \right) \right\} \\ &\sim \left(p + \frac{1}{2}p^3 \right) - \frac{\left(p + \frac{1}{2}p^3 \right)^3}{3} + \dots \\ &\sim p + \frac{p^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\frac{\theta_1}{p} \sim 1 + \frac{p^2}{6} > 1.$$

リーブフロッグスキームの物理モードの位相は真の解よりも早く進む. 但し, 松野スキームよりは遅い.

参考文献

川畑 拓也, 2011, 「時間差分スキーム (1)」

URL:http://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/~gfdlab/comptech/resume/0728/2011_0728-takuya.pdf

Mesinger, F., and Arakawa, A., 1976, Numerical methods used in atmospheric models, GARP Publications series (World Meteorological Organization), No. 17, Part 1., 64 pp

石岡 圭一, 2004, 「スペクトル法による数値計算入門」, 東京大学出版会, ISBN:4130613057

竹野 茂治, 2009, 「勾配から角度を求める展開式」

URL:<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/data/arctan1.pdf>

KIT 数学ナビゲーション, 2007, 「微分 $\arctan x$ 」

URL:<http://w3e.kanazawa-it.ac.jp/math/category/bibun/keisan/henkan-tex.cgi?target=/math/category/bibun/keisan/diff-arctan.html>