ルンゲクッタ型公式の安定性

ここでは, ルンゲクッタ型公式の, 振動方程式及び一次元移流方程式においての安定性について議論する.

1 段 1 位のルンゲクッタ型公式の安定性

1 段 1 位のルンゲクッタ型公式とは, オイラー法のことである. 時間差分スキームにおいてオイラー法を用いた場合, 差分式は以下の式で表される.

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t f(u^n, t^n) \tag{1}$$

振動方程式

以下の様な振動方程式を考える.

$$\frac{du(t)}{dt} = i\omega u(t). \tag{2}$$

ここで, ω は定数である. 式 (2) にオイラー法を適用すると, 以下のような式になる.

$$u^{n+1} = u^n + i\omega\Delta t u^n. \tag{3}$$

増幅係数 $\lambda = \frac{u^{n+1}}{u^n}$ を導入すると,

$$\lambda = 1 + i\omega\Delta t. \tag{4}$$

$|\lambda|$ の大きさを求めると,

$$|\lambda| = \sqrt{1 + (\omega\Delta t)^2} > 1 \tag{5}$$

よって, $|\lambda| > 1$ となるため, 改良オイラー法及びホイン法は振動方程式に対して不安定である.

一次元移流方程式

以下のような一次元移流方程式を考える.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \quad c = \mathrm{const.} \tag{6}$$

また, 領域は $x = [0, L]$ の有限領域であり, 境界条件は周期境界とする. ここで, 空間差分には 2 次の中心差分, 時間差分にはオイラー法を用いて差分化する. このとき, 空間方向に領域を J 分割し, 周期境界より $x_J = x_0$ とする このとき, 一次元移流方程式は以下のようになる.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\Delta t\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \tag{7}$$

ここで, j は空間方向の添字である. u を複素数に拡張し, U を振幅, k を波数として $u_j^n = \displaystyle\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^n e^{-i\mathrm{k}j\Delta x}$ を代入すると,

$$\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n+1} e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} = \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^n e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^n \left(e^{-i\mathrm{k}(j+1)\Delta x} - e^{-i\mathrm{k}(j-1)\Delta x}\right). \tag{8}$$

両辺に $e^{i\mathrm{k}'j\Delta x}$ をかけ, j について総和を取ると,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n+1} e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} e^{i\mathrm{k}'j\Delta x} \\
&= \sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} e^{i\mathrm{k}'j\Delta x} \\
&\quad - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n}\left(e^{-i\mathrm{k}(j+1)\Delta x} e^{i\mathrm{k}'j\Delta x} - e^{-i\mathrm{k}(j-1)\Delta x} e^{i\mathrm{k}'j\Delta x}\right), \\
&\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n+1} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&= \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&\quad - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\left(e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j+1))\Delta x} - e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j-1))\Delta x}\right) \\
&= \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&\quad - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n}\left(e^{-i\mathrm{k}\Delta x} - e^{i\mathrm{k}\Delta x}\right) \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x}.
\end{aligned} \tag{9}$$

三角関数の直交性より,

$$\begin{aligned}
U_{\mathrm{k}'}^{n+1} &= U_{\mathrm{k}'}^{n} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} U_{\mathrm{k}'}^{n}\left(e^{-i\mathrm{k}'\Delta x} - e^{i\mathrm{k}'\Delta x}\right) \\
&= U_{\mathrm{k}'}^{n}\left(1 + i\frac{c\Delta t}{\Delta x}\sin \mathrm{k}'\Delta x\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

ここで, $p = \frac{c\Delta t}{\Delta x}\sin \mathrm{k}'\Delta x$ とし, 増幅係数 $\lambda = \frac{U_{\mathrm{k}'}^{n+1}}{U_{\mathrm{k}'}^{n}}$ を導入すると,

$$\begin{aligned}
\lambda &= 1 + ip \\
|\lambda| &= \sqrt{1+p^2} \geq 1
\end{aligned} \tag{11}$$

よって, $|\lambda| \geq 1$ となるため, オイラー法は一次元移流方程式に対して, $k\Delta x = n\pi(n$ は整数) となる波数においては中立, それ以外の波数においては不安定である.

2 段 2 位のルンゲクッタ型公式の安定性

2 段 2 位のルンゲクッタ型公式のうち, ここでは改良オイラー法とホイン法の 2 通りの数値解法について議論する. 時間差分スキームにおいて改良オイラー法を用いた場合, 差分式は以下の式で表される.

$$
\begin{aligned}
k_1^n &= \Delta t f(u^n, t^n), \\
k_2^n &= \Delta t f(u^n + \frac{1}{2}k_1^n, t^n + \frac{1}{2}\Delta t), \\
u^{n+1} &= u^n + k_2^n.
\end{aligned} \tag{12}
$$

また, ホイン法を用いた場合には, 以下の式で表される.

$$
\begin{aligned}
k_1^n &= \Delta t f(u^n, t^n), \\
k_2^n &= \Delta t f(u^n + k_1^n, t^n + \Delta t), \\
u^{n+1} &= u^n + \frac{1}{2}(k_1^n + k_2^n).
\end{aligned} \tag{13}
$$

振動方程式

以下の様な振動方程式を考える.

$$
\frac{du(t)}{dt} = i\omega u(t). \tag{14}
$$

式 (14) に式 (12) 及び式 (13) を適用すると, 両式共に以下のような式になる.

$$
u^{n+1} = u^n + i\omega\Delta t u^n - \frac{1}{2}(\omega\Delta t)^2 u^n. \tag{15}
$$

増幅係数 $\lambda = \frac{u^{n+1}}{u^n}$ を導入すると,

$$
\begin{aligned}
\lambda &= 1 + i\omega\Delta t - \frac{1}{2}(\omega\Delta t)^2 \\
&= 1 + ip - \frac{1}{2}p^2.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

ここで, $p = \omega\Delta t$ とした. ここで, $|\lambda|$ の大きさを求める.

$$
\begin{aligned}
|\lambda| &= \sqrt{(1 - \frac{1}{2}p^2)^2 + p^2} \\
&= \sqrt{1 + \frac{1}{4}p^4} > 1
\end{aligned}
\tag{17}
$$

よって, $|\lambda| > 1$ となるため, 改良オイラー法及びホイン法は振動方程式に対して不安定である.

一次元移流方程式

以下のような一次元移流方程式を考える.

$$
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \qquad c = \mathrm{const.}
\tag{18}
$$

また, 領域は $x = [0, L]$ の有限領域であり, 境界条件は周期境界とする. ここで, 空間差分には 2 次の中心差分, 時間差分に改良オイラー法を用いて差分化する. このとき, 空間方向に領域を J 分割し, 周期境界より $x_J = x_0$ とする このとき, 一次元移流方程式は以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
k^n_{1,j} &= -c\Delta t\frac{u^n_{j+1} - u^n_{j-1}}{2\Delta x}, \\
k^n_{2,j} &= -c\Delta t\frac{u^n_{j+1} + \frac{1}{2}k^n_{1,j+1} - u^n_{j-1} - \frac{1}{2}k^n_{1,j-1}}{2\Delta x} \\
u^{n+1}_j &= u^n_j + k^n_{2,j}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

また, 時間差分にホイン法を用いた場合は, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} k_{1,j}^n &= -c\Delta t \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}, \\ k_{2,j}^n &= -c\Delta t \frac{u_{j+1}^n + k_{1,j+1}^n - u_{j-1}^n - k_{1,j-1}^n}{2\Delta x} \\ u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{1}{2}(k_{1,j}^n + k_{2,j}^n). \end{aligned} \tag{20}$$

この 2 式は, 整理するとどちらも以下のような式になる.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\Delta t \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2}(c\Delta t)^2 \frac{u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n}{(2\Delta x)^2}. \tag{21}$$

ここで, j は空間方向の添字である. u を複素数に拡張し, U を振幅, k を波数として $u_j^n = \displaystyle\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^n e^{-\mathrm{ik}j\Delta x}$ を代入すると,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n+1} e^{-\mathrm{ik}j\Delta x} = &\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^n e^{-\mathrm{ik}j\Delta x} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^n \left(e^{-\mathrm{ik}(j+1)\Delta x} - e^{-\mathrm{ik}(j-1)\Delta x}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^2 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^n \left(e^{-\mathrm{ik}(j+2)\Delta x} - 2e^{-\mathrm{ik}j\Delta x} + e^{-\mathrm{ik}(j-2)\Delta x}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

両辺に $e^{\mathrm{ik}'j\Delta x}$ をかけ, j について総和を取ると,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n+1} e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} \\
&= \sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} \\
&\quad - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n}\left(e^{-i\mathrm{k}(j+1)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} - e^{-i\mathrm{k}(j-1)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^2 \sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n}\left(e^{-i\mathrm{k}(j+2)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} - 2e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} + e^{-i\mathrm{k}(j-2)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x}\right), \\
&\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n+1}\sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&= \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n}\sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&- \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n}\sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\left(e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j+1))\Delta x} - e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j-1))\Delta x}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^2 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n}\sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\left(e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j+2))\Delta x} - 2e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k})j\Delta x} + e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j-2))\Delta x}\right) \\
&= \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n}\sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&\quad - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n}\left(e^{-i\mathrm{k}\Delta x} - e^{i\mathrm{k}\Delta x}\right)\sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^2 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n}\left(e^{-2i\mathrm{k}\Delta x} - 2 + e^{2i\mathrm{k}\Delta x}\right)\sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x}. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

三角関数の直交性より,

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{k}'}^{n+1} &= U_{\mathrm{k}'}^{n} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}U_{\mathrm{k}'}^{n}\left(e^{-i\mathrm{k}'\Delta x} - e^{i\mathrm{k}'\Delta x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^2 U_{\mathrm{k}'}^{n}\left(e^{-2i\mathrm{k}'\Delta x} - 2 + e^{2i\mathrm{k}'\Delta x}\right) \\
&= U_{\mathrm{k}'}^{n}\left(1 + i\frac{c\Delta t}{\Delta x}\sin \mathrm{k}'\Delta x - \frac{1}{2}\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 \mathrm{k}'\Delta x\right) \qquad (24)
\end{aligned}
$$

$p = \frac{c\Delta t}{\Delta x}\sin \mathrm{k}'\Delta x$ とし, 増幅係数 $\lambda = \frac{U^{n+1}_{\mathrm{k}'}}{U^{n}_{\mathrm{k}'}}$ を導入すると,

$$
\begin{aligned}
\lambda &= 1 + ip - \frac{p^2}{2} \\
|\lambda| &= \sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{2}\right)^2 + p^2} \\
&= \sqrt{1 + \frac{p^4}{4}} \geq 1
\end{aligned} \tag{25}
$$

よって, $|\lambda| \geq 1$ となるため, 2 段 2 位のルンゲクッタ型公式は一次元移流方程式に対して, $k\Delta x = n\pi$(n は整数) となる波数においては中立, それ以外の波数においては不安定である.

3 段 3 位のルンゲクッタ型公式の安定性

3 段 3 位のルンゲクッタ型公式のうち, ここではホインの 3 次公式について議論する. 時間差分におけるホインの 3 次公式は以下の式で表される.

$$
\begin{aligned}
k_1^n &= \Delta t f(u^n, t^n), \\
k_2^n &= \Delta t f(u^n + \frac{1}{3}k_1^n, t^n + \frac{1}{3}\Delta t), \\
k_3^n &= \Delta t f(u^n + \frac{2}{3}k_2^n, t^n + \frac{2}{3}\Delta t), \\
u^{n+1} &= u^n + \frac{1}{4}(k_1^n + 3k_3^n).
\end{aligned} \tag{26}
$$

振動方程式

以下の様な振動方程式を考える.

$$
\frac{du(t)}{dt} = i\omega u(t). \tag{27}
$$

式 (27) に式 (26) を適用すると,

$$u^{n+1} = u^n + i\omega\Delta t u^n - \frac{1}{2}(\omega\Delta t)^2 u^n - \frac{1}{6}i(\omega\Delta t)^3 u^n. \tag{28}$$

増幅係数 $\lambda = \frac{u^{n+1}}{u^n}$ を導入すると,,

$$\begin{aligned}\lambda &= 1 + i\omega\Delta t - \frac{1}{2}(\omega\Delta t)^2 - \frac{1}{6}i(\omega\Delta t)^3 \\ &= 1 + ip - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{6}ip^3.\end{aligned} \tag{29}$$

ここで, $p = \omega\Delta t$ とした. ここで, $|\lambda|$ の大きさを求める.

$$\begin{aligned}|\lambda| &= \sqrt{(1 - \frac{1}{2}p^2)^2 + (p - \frac{1}{6}p^3)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{12}p^4 + \frac{1}{36}p^6}\end{aligned} \tag{30}$$

$-\sqrt{3} \leq p \leq \sqrt{3}$ のとき, $|\lambda| \leq 1$ となる. よって, $-\sqrt{3} \leq p \leq \sqrt{3}$ のとき, ホインの 3 次公式は振動方程式に対して安定である.

一次元移流方程式

以下のような一次元移流方程式を考える.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \qquad c = \mathrm{const.} \tag{31}$$

また, 領域は $x = [0, L]$ の有限領域であり, 境界条件は周期境界とする. ここで, 空間差分には 2 次の中心差分, 時間差分にはホインの 3 次光式を用いて差分化する. このとき, 空間方向に領域を J 分割し, 周期境界より $x_J = x_0$ とする このとき, 一次元移流方程式は以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
k^n_{1,j} &= -c\Delta t \frac{u^n_{j+1} - u^n_{j-1}}{2\Delta x}, \\
k^n_{2,j} &= -c\Delta t \frac{u^n_{j+1} + \frac{1}{3}k^n_{1,j+1} - u^n_{j-1} - \frac{1}{3}k^n_{1,j-1}}{2\Delta x} \\
k^n_{3,j} &= -c\Delta t \frac{u^n_{j+1} + \frac{2}{3}k^n_{2,j+1} - u^n_{j-1} - \frac{2}{3}k^n_{2,j-1}}{2\Delta x} \\
u^{n+1}_j &= u^n_j + \frac{1}{4}\left(k^n_{1,j} + 3k^n_{3,j}\right).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

この式を整理すると, 以下のような式になる.

$$
\begin{aligned}
u^{n+1}_j = u^n_j &- c\Delta t \frac{u^n_{j+1} - u^n_{j-1}}{2\Delta x} + \frac{1}{2}(c\Delta t)^2 \frac{u^n_{j+2} - 2u^n_j + u^n_{j-2}}{(2\Delta x)^2} \\
&- \frac{1}{6}(c\Delta t)^3 \frac{u^n_{j+3} - 3u^n_{j+1} + 3u^n_{j-1} - u^n_{j-3}}{(2\Delta x)^3}.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

ここで, j は空間方向の添字である. u を複素数に拡張し, U を振幅, k を波数として $u^n_j = \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U^n_{\mathrm{k}} e^{-i\mathrm{k}j\Delta x}$ を代入すると,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U^{n+1}_{\mathrm{k}} e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} \\
&= \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U^n_{\mathrm{k}} e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} \\
&\quad - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U^n_{\mathrm{k}} \left(e^{-i\mathrm{k}(j+1)\Delta x} - e^{-i\mathrm{k}(j-1)\Delta x}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^2 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U^n_{\mathrm{k}} \left(e^{-i\mathrm{k}(j+2)\Delta x} - 2e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} + e^{-i\mathrm{k}(j-2)\Delta x}\right) \\
&\quad - \frac{1}{6}\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^3 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U^n_{\mathrm{k}} \left(e^{-i\mathrm{k}(j+3)\Delta x} - 3e^{-i\mathrm{k}(j+1)\Delta x} + 3e^{-i\mathrm{k}(j-1)\Delta x} - e^{-i\mathrm{k}(j-3)\Delta x}\right).
\end{aligned}
\tag{34}
$$

両辺に $e^{i\mathrm{k}'j\Delta x}$ をかけ, j について総和を取ると,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n+1} e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} \\
&= \sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} \\
&\quad - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n}\left(e^{-i\mathrm{k}(j+1)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} - e^{-i\mathrm{k}(j-1)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^{2}\sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n}\left(e^{-i\mathrm{k}(j+2)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} - 2e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} + e^{-i\mathrm{k}(j-2)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x}\right) \\
&\quad - \frac{1}{6}\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^{3}\sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n}(\\
&\qquad e^{-i\mathrm{k}(j+3)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} - 3e^{-i\mathrm{k}(j+1)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} + 3e^{-i\mathrm{k}(j-1)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} - e^{-i\mathrm{k}(j-3)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} \\
&\qquad),
\end{aligned} \tag{35}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n+1} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&= \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&\quad - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} \left(e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j+1))\Delta x} - e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j-1))\Delta x} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^2 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} \left(e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j+2))\Delta x} - 2e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k})j\Delta x} + e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j-2))\Delta x} \right) \\
&\quad - \frac{1}{6}\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^3 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} (\\
&\qquad e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j+3))\Delta x} - 3e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k})(j+1)\Delta x} + 3e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j-1))\Delta x} - e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j-3))\Delta x} \\
&\qquad) \\
&= \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&\quad - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \left(e^{-i\mathrm{k}\Delta x} - e^{i\mathrm{k}\Delta x} \right) \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^2 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \left(e^{-2i\mathrm{k}\Delta x} - 2 + e^{2i\mathrm{k}\Delta x} \right) \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&\quad - \frac{1}{6}\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^3 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \left(e^{-3i\mathrm{k}\Delta x} - 3e^{-i\mathrm{k}\Delta x} + 3e^{i\mathrm{k}\Delta x} - e^{3i\mathrm{k}\Delta x} \right) \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

三角関数の直交性より,

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{k}'}^{n+1} &= U_{\mathrm{k}'}^{n} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} U_{\mathrm{k}'}^{n} \left(e^{-i\mathrm{k}'\Delta x} - e^{i\mathrm{k}\Delta x} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \right)^2 U_{\mathrm{k}'}^{n} \left(e^{-2i\mathrm{k}'\Delta x} - 2 + e^{2i\mathrm{k}'\Delta x} \right) \\
&\quad - \frac{1}{6} \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \right)^3 U_{\mathrm{k}'}^{n} \left(e^{-3i\mathrm{k}'\Delta x} - 3e^{-i\mathrm{k}'\Delta x} + 3e^{i\mathrm{k}'\Delta x} - e^{3i\mathrm{k}'\Delta x} \right) \\
&= U_{\mathrm{k}'}^{n} \left\{ 1 + i\frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin \mathrm{k}'\Delta x - \frac{1}{2} \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 \mathrm{k}'\Delta x - \frac{i}{6} \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^3 \sin^3 \mathrm{k}'\Delta x \right\}.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

$p = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin \mathrm{k}'\Delta x$ とし, 増幅係数 $\lambda = \frac{U_{\mathrm{k}'}^{n+1}}{U_{\mathrm{k}'}^{n}}$ を導入すると,

$$
\begin{aligned}
\lambda &= 1 + ip - \frac{p^2}{2} - i\frac{p^3}{6} \\
|\lambda| &= \sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{2}\right)^2 + \left(p - \frac{p^3}{6}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 - \frac{1}{12}p^4 + \frac{1}{36}p^6}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

$-\sqrt{3} \leq p \leq \sqrt{3}$ のとき, $|\lambda| \leq 1$ となる. よって, $-\sqrt{3} \leq p \leq \sqrt{3}$ のとき, ホインの 3 次公式は一次元移流方程式に対して安定である.

4 段 4 位のルンゲクッタ型公式の安定性

4 段 4 位のルンゲクッタ型公式のうち, ここでは古典的ルンゲクッタ公式について議論する. 時間差分における古典的ルンゲクッタ公式は以下の式で表される.

$$
\begin{aligned}
k_1^n &= \Delta t f(u^n, t^n), \\
k_2^n &= \Delta t f(u^n + \frac{1}{2}k_1^n, t^n + \frac{1}{2}\Delta t), \\
k_3^n &= \Delta t f(u^n + \frac{1}{2}k_2^n, t^n + \frac{1}{2}\Delta t), \\
k_4^n &= \Delta t f(u^n + k_3^n, t^n + \Delta t), \\
u^{n+1} &= u^n + \frac{1}{6}(k_1^n + 2k_2^n + 2k_3^n + k_4).
\end{aligned} \tag{39}
$$

振動方程式

以下の様な振動方程式を考える.

$$
\frac{du(t)}{dt} = i\omega u(t). \tag{40}
$$

式 (40) に式 (39) を適用すると,

$$
u^{n+1} = u^n + i\omega\Delta t u^n - \frac{1}{2}(\omega\Delta t)^2 u^n - \frac{1}{6}i(\omega\Delta t)^3 u^n + \frac{1}{24}(\omega\Delta t)^4 u^n. \tag{41}
$$

増幅係数 $\lambda = \frac{u^{n+1}}{u^n}$ を導入すると,,

$$
\begin{aligned}
\lambda &= 1 + i\omega\Delta t - \frac{1}{2}(\omega\Delta t)^2 - \frac{1}{6}i(\omega\Delta t)^3 + \frac{1}{24}(\omega\Delta t)^4 \\
&= 1 + ip - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{6}ip^3 + \frac{1}{24}p^4.
\end{aligned} \tag{42}
$$

ここで, $p = \omega\Delta t$ とした. ここで, $|\lambda|$ の大きさを求める.

$$
\begin{aligned}
|\lambda| &= \sqrt{(1 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{24}p^4)^2 + (p - \frac{1}{6}p^3)^2} \\
&= \sqrt{1 - \frac{1}{72}p^6 + \frac{1}{576}p^8}
\end{aligned} \tag{43}
$$

$-2\sqrt{2} \leq p \leq 2\sqrt{2}$ のとき, $|\lambda| \leq 1$ となる. よって, $-2\sqrt{2} \leq p \leq 2\sqrt{2}$ のとき, 古典的ルンゲクッタ公式は振動方程式に対して安定である.

一次元移流方程式

以下のような一次元移流方程式を考える.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \qquad c = \mathrm{const.} \tag{44}$$

また, 領域は有限であり, 境界条件は周期境界とする. ここで, 空間差分には 2 次の中心差分, 時間差分にはルンゲクッタ型公式を用いて差分化する. 古典的ルンゲクッタ公式においては, 以下のようになる.

$$\begin{aligned}
k_{1,j}^n &= -c\Delta t \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}, \\
k_{2,j}^n &= -c\Delta t \frac{u_{j+1}^n + \frac{1}{2}k_{1,j+1}^n - u_{j-1}^n - \frac{1}{2}k_{1,j-1}^n}{2\Delta x} \\
k_{3,j}^n &= -c\Delta t \frac{u_{j+1}^n + \frac{1}{2}k_{2,j+1}^n - u_{j-1}^n - \frac{1}{2}k_{2,j-1}^n}{2\Delta x} \\
k_{4,j}^n &= -c\Delta t \frac{u_{j+1}^n + k_{3,j+1}^n - u_{j-1}^n - k_{3,j-1}^n}{2\Delta x} \\
u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{1}{6}\left(k_{1,j}^n + 2k_{2,j}^n + 2k_{3,j}^n + k_{4,j}^n\right).
\end{aligned} \tag{45}$$

この式を整理すると, 以下のような式になる.

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} = u_j^n &- c\Delta t \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2}(c\Delta t)^2 \frac{u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n}{(2\Delta x)^2} \\
&- \frac{1}{6}(c\Delta t)^3 \frac{u_{j+3}^n - 3u_{j+1}^n + 3u_{j-1}^n - u_{j-3}^n}{(2\Delta x)^3} \\
&+ \frac{1}{24}(c\Delta t)^4 \frac{u_{j+4}^n - 4u_{j+2}^n + 6u_j^n - 4u_{j-2}^n + u_{j-4}^n}{(2\Delta x)^4}.
\end{aligned} \tag{46}$$

ここで, u を複素数に拡張し, U を振幅, k を波数として $u_j^n = \displaystyle\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^n e^{-i\mathrm{k}j\Delta x}$ を代入すると,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n+1} e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} \\
&= \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} \\
&\quad - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \left(e^{-i\mathrm{k}(j+1)\Delta x} - e^{-i\mathrm{k}(j-1)\Delta x} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \right)^2 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \left(e^{-i\mathrm{k}(j+2)\Delta x} - 2e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} + e^{-i\mathrm{k}(j-2)\Delta x} \right) \\
&\quad - \frac{1}{6} \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \right)^3 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \left(e^{-i\mathrm{k}(j+3)\Delta x} - 3e^{-i\mathrm{k}(j+1)\Delta x} + 3e^{-i\mathrm{k}(j-1)\Delta x} - e^{-i\mathrm{k}(j-3)\Delta x} \right) \\
&\quad + \frac{1}{24} \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \right)^4 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \left(e^{-i\mathrm{k}(j+4)\Delta x} - 4e^{-i\mathrm{k}(j+2)\Delta x} + 6e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} - 4e^{-i\mathrm{k}(j-2)\Delta x} + e^{-i\mathrm{k}(j-4)\Delta x} \right).
\end{aligned}
\tag{47}
$$

両辺に $e^{i\mathrm{k}'j\Delta x}$ をかけ, j について総和を取ると,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n+1} e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} \\
&= \sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} \\
&\quad - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \left(e^{-i\mathrm{k}(j+1)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} - e^{-i\mathrm{k}(j-1)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^2 \sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \left(e^{-i\mathrm{k}(j+2)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} - 2e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} + e^{-i\mathrm{k}(j-2)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} \right) \\
&\quad - \frac{1}{6}\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^3 \sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} (\\
&\qquad e^{-i\mathrm{k}(j+3)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} - 3e^{-i\mathrm{k}(j+1)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} + 3e^{-i\mathrm{k}(j-1)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} - e^{-i\mathrm{k}(j-3)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} \\
&\qquad) \\
&\quad + \frac{1}{24}\left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\right)^4 \sum_{\mathrm{j}=1}^{J}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} (\\
&\qquad e^{-i\mathrm{k}(j+4)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} - 4e^{-i\mathrm{k}(j+2)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} + 6e^{-i\mathrm{k}j\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} \\
&\qquad - 4e^{-i\mathrm{k}(j-2)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} + e^{-i\mathrm{k}(j-4)\Delta x} e^{i\mathrm{k}' j\Delta x} \\
&\qquad),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n+1} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&= \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&\quad - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} \left(e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j+1))\Delta x} - e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j-1))\Delta x} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \right)^2 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} \left(e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j+2))\Delta x} - 2e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k})j\Delta x} + e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j-2))\Delta x} \right) \\
&\quad - \frac{1}{6} \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \right)^3 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} (\\
&\qquad e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j+3))\Delta x} - 3e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k})(j+1)\Delta x} + 3e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j-1))\Delta x} - e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j-3))\Delta x} \qquad) \\
&\quad + \frac{1}{24} \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \right)^4 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} (\\
&\qquad e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j+4))\Delta x} - 4e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k})(j+2)\Delta x} + 6e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}j)\Delta x} - 4e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j-2))\Delta x} + e^{i(\mathrm{k}'j-\mathrm{k}(j-4))\Delta x} \\
&\qquad) \\
&= \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&\quad - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \left(e^{-i\mathrm{k}\Delta x} - e^{i\mathrm{k}\Delta x} \right) \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \right)^2 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \left(e^{-2i\mathrm{k}\Delta x} - 2 + e^{2i\mathrm{k}\Delta x} \right) \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&\quad - \frac{1}{6} \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \right)^3 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \left(e^{-3i\mathrm{k}\Delta x} - 3e^{-i\mathrm{k}\Delta x} + 3e^{i\mathrm{k}\Delta x} - e^{i\mathrm{k}\Delta x} \right) \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} \\
&\quad + \frac{1}{24} \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \right)^4 \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} U_{\mathrm{k}}^{n} \left(e^{-4i\mathrm{k}\Delta x} - 4e^{-2i\mathrm{k}\Delta x} + 6 - 4e^{2i\mathrm{k}\Delta x} + e^{4i\mathrm{k}\Delta x} \right) \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} e^{i(\mathrm{k}'-\mathrm{k})j\Delta x} .
\end{aligned}
\tag{48}
$$

三角関数の直交性より,

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{k}'}^{n+1} &= U_{\mathrm{k}'}^{n} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} U_{\mathrm{k}'}^{n} \left(e^{-i\mathrm{k}'\Delta x} - e^{i\mathrm{k}\Delta x} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \right)^2 U_{\mathrm{k}'}^{n} \left(e^{-2i\mathrm{k}'\Delta x} - 2 + e^{2i\mathrm{k}'\Delta x} \right) \\
&- \frac{1}{6} \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \right)^3 U_{\mathrm{k}'}^{n} \left(e^{-3i\mathrm{k}'\Delta x} - 3e^{-i\mathrm{k}'\Delta x} + 3e^{i\mathrm{k}'\Delta x} - e^{3i\mathrm{k}'\Delta x} \right) \\
&+ \frac{1}{24} \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \right)^4 U_{\mathrm{k}'}^{n} \left(e^{-4i\mathrm{k}'\Delta x} - 4e^{-2i\mathrm{k}'\Delta x} + 6 - 4e^{2i\mathrm{k}'\Delta x} + e^{4i\mathrm{k}'\Delta x} \right) \\
&= U_{\mathrm{k}'}^{n} \{ \\
&\quad 1 + i\frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin \mathrm{k}'\Delta x - \frac{1}{2} \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 \mathrm{k}'\Delta x \\
&\quad - \frac{i}{6} \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^3 \sin^3 \mathrm{k}'\Delta x + \frac{1}{24} \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^4 \sin^4 \mathrm{k}'\Delta x \\
&\quad \}.
\end{aligned} \tag{49}
$$

$p = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin \mathrm{k}'\Delta x$ とし, 増幅係数 $\lambda = \frac{U_{\mathrm{k}'}^{n+1}}{U_{\mathrm{k}'}^{n}}$ を導入すると,

$$
\begin{aligned}
\lambda &= 1 + ip - \frac{p^2}{2} - i\frac{p^3}{6} + \frac{p^4}{24} \\
|\lambda| &= \sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{2} + \frac{p^4}{24} \right)^2 + \left(p - \frac{p^3}{6} \right)^2} \\
&= \sqrt{1 - \frac{1}{72}p^6 + \frac{1}{576}p^8}
\end{aligned} \tag{50}
$$

$-2\sqrt{2} \le p \le 2\sqrt{2}$ のとき, $|\lambda| \le 1$ となる. よって, $-2\sqrt{2} \le p \le 2\sqrt{2}$ のとき, 古典的ルンゲクッタ公式は一次元移流方程式に対して安定である.