

一次元移流方程式の数値解法

1.1 2次精度中心差分を用いた線形移流方程式の離散化

1次元線形移流方程式は以下の様に表される.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \text{const.} \quad (1.1.1)$$

式(??)の一般解は,

$$u = f(x - ct) \quad (1.1.2)$$

である. 最も簡単な離散化は, 時間方向にはオイラースキーム (前進差分), 空間方向には上流差分を用いたものである.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (1.1.3)$$

この離散化方法の精度は, 誤差

$$\epsilon \equiv u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t) \quad (1.1.4)$$

によって評価することができる. GFD ワークノート「有限差分法の基礎 (1)」での考察より,

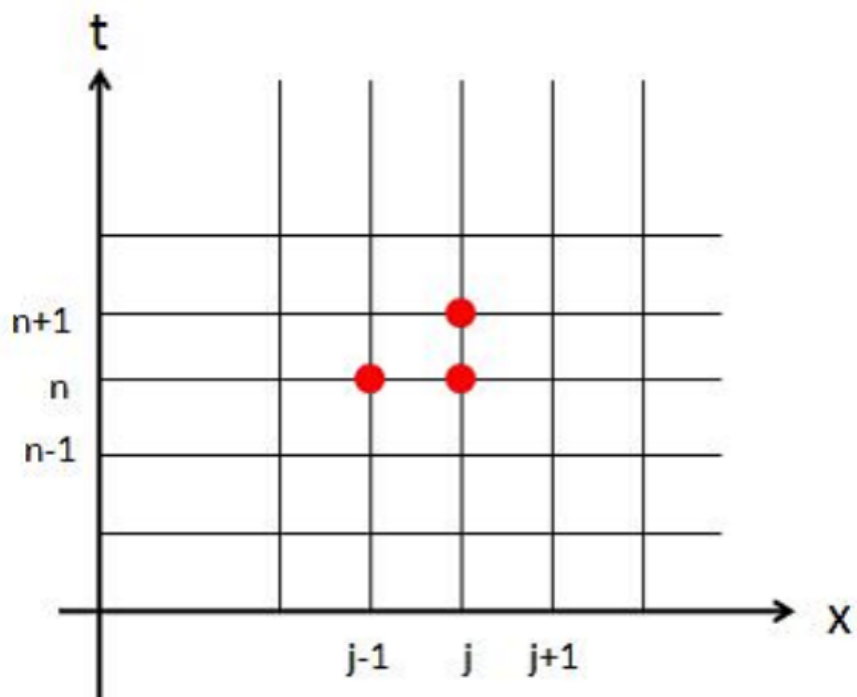


図 1.1: $t-x$ 平面において, 式 (??) で考えている格子点を示した図. 赤丸で示された点が考えている格子点である.

$$\epsilon = O(\Delta t, \Delta x) \quad (1.1.5)$$

であり, 時間方向, 空間方向共に 1 次精度であることがわかる.

ここで, もう少し精度の良い離散化方法を考えてみる. 空間微分を中心差分を用いて離散化すると,

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -c \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} \quad (1.1.6)$$

となる. また, 時間方向にリープフロックスキームを用いて離散化すると,

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} &= \left(-c \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}\right)^n \\ &= -c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}\end{aligned}\quad (1.1.7)$$

となる. 式(??)の性質を知るため, u のとあるフーリエ成分 (波数成分) を取り出して考えることにする. まず, u を以下のように表す.

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{\infty} U_k(t) e^{-ikx} \right] \\ u_j^n &= \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{\infty} U_k(n\Delta t) e^{-ikj\Delta x} \right]\end{aligned}\quad (1.1.8)$$

ここで, 式(??)に式(??)の u_j^n を代入すると,

$$\begin{aligned}\frac{U_k^{n+1} e^{-ik(j\Delta x)} - U_k^{n-1} e^{-ik(j\Delta x)}}{2\Delta t} &= -c \frac{U_k^n e^{-ik[(j+1)\Delta x]} - U_k^n e^{-ik[(j-1)\Delta x]}}{2\Delta x} \\ &= -c \frac{U_k^n e^{-ik\Delta x} - U_k^n e^{ik\Delta x}}{2\Delta x} e^{-ik(j\Delta x)} \\ &= c \frac{U_k^n [2i \sin(k\Delta x)]}{2\Delta x} e^{-ik(j\Delta x)} \\ \frac{U_k^{n+1} - U_k^{n-1}}{2\Delta t} &= i \left[\frac{c}{\Delta x} \sin(k\Delta x) \right] U_k^n\end{aligned}\quad (1.1.9)$$

ここで,

$$p \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)$$

とおくと, 式(??)は以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}U_k^{n+1} &= U_k^{n-1} + 2i \left[\frac{c}{\Delta x} \Delta t \sin(k\Delta x) \right] U_k^n \\ &= U_k^{n-1} + 2ip U_k^n\end{aligned}\quad (1.1.10)$$

また,

$$\omega \equiv \frac{c}{\Delta x} \sin(k\Delta x)$$

とおくと, 式 (??) は振動方程式に一致する. リーフログスキームを用いた場合の振動方程式の安定性条件は $|p| \leq 1$ であるため, これを式 (??) について考えると,

$$|p| = \left| \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x) \right| \leq 1$$

ここで $|\sin(k\Delta x)| \leq 1$ であるため,

$$\begin{aligned} |p| &\leq \left| \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right| \\ &= |c| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

式 (??) は CFL 条件と呼ばれる.

1.1.1 高周波成分を用いた安定性の考察

計算が発散してしまわないためには, すべての場合において $|p| \leq 1$ が成り立てば良い. よって, $|p|$ が最大となる波数 k の値, 及びそのときの波長を考える. Δx 及び Δt を固定したとき, 式 (??) において $|p|$ が最大となるのは, $\sin(k\Delta x)$ が極値を取るときである. この条件に当てはまる最小の波数 k の値は $k = \pi/(2\Delta x)$ であり, この波数 k に対応する波長 (つまり式 (??) において $|p|$ が最大となる最大の波長) は $2\pi/k = 4\Delta x$ である. これは, 図??より, 解像可能な最小の波長の二倍である. また, $|p|$ が最大となる $2\pi/k = 4\Delta x$ よりも短い波長については, 解像可能な最小の波長よりも短くなってしまいうため, 波としては計算結果に現れない.

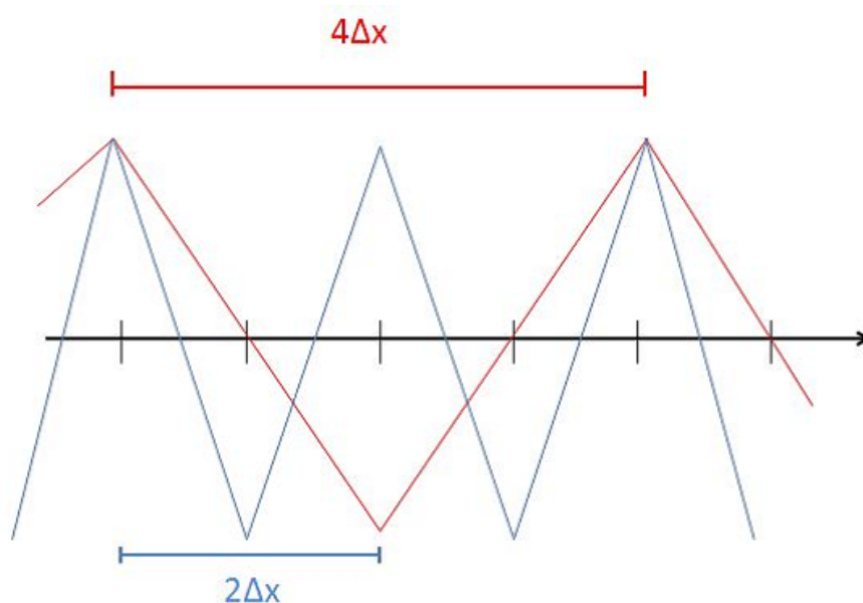


図 1.2: 解像可能な最小の波長を持つ波と, $|p|$ が最大となる波長を持つ波を示した図. 青い線が解像可能な最小の波長を持つ波, 赤い線が式 (??) において $|p|$ が最大となる最大の波長を持つ波を示している. また, 横軸が空間方向の波長, 縦軸が u の値である.