付録3:Adams-Bashforce公式

以下のような1次元移流方程式を, 2位の Adams-Bashforce スキームと3位の Adams-Bashforce 公式で解く.

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = 0 \tag{11.0.1}$$

$$\begin{aligned} \text{初期条件：}\quad & u(x,0) = \cos 2\pi x (0 < x < 1), \\ & u(x,0) = 0.0(1.0 < x) \\ \text{境界条件：}\quad & u(0,t) = u(1.0,t). \end{aligned}$$

ただし, 今回は $c = 1.0$ とし, 空間差分には二次精度の中心差分をとる.

2位の Adams-Bashforce 公式

Adams-Bashforce 公式は多段階の公式である. そのため前のステップを1段階の公式を用いて解く必要がある. 今回は1ステップ目の計算では2段2位公式であるホイン法を用いて解く. ホイン法を (11.0.1) に当てはめると,

$$\begin{aligned} k_1(i\Delta x, n\Delta t) &= -c\Delta t\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} \\ k_2(i\Delta x, n\Delta t) &= -c\Delta t\frac{U_{i+1}^* - U_{i-1}^*}{2\Delta x} \\ U_i^{n+1} &= U_i^n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

となる. このとき,

$$\begin{aligned} U_{i+1}^* &= U_{i+1}^n + k_1((i+1)\Delta x) \\ U_{i-1}^* &= U_{i-1}^n + k_1((i-1)\Delta x) \end{aligned}$$

である. 2ステップ目以降はこの U^{n+1} を2位の Adams-Bashforce 公式に当てはめることで求めるられる. 実際に $n+2$ 以降を Adams-Bashforce 公式に当てはめると,

$$U_i^{n+2} = U_i^{n+1} + \Delta t\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x}\right)$$

となる. 実際に計算するときは, 1 ステップ目で計算した k_1 を用いることで計算量を減らすことができる.

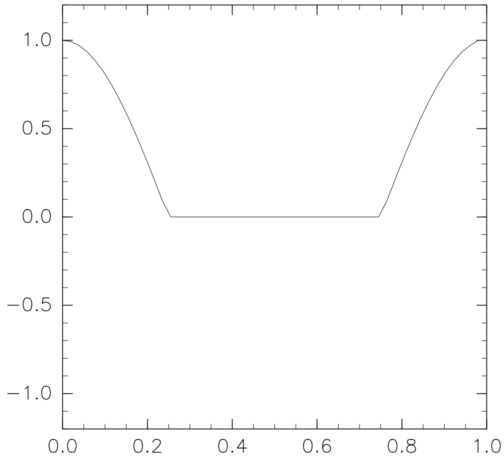

図 11.0.1: $N = 50, \Delta t = \dfrac{1}{100} t = 0$

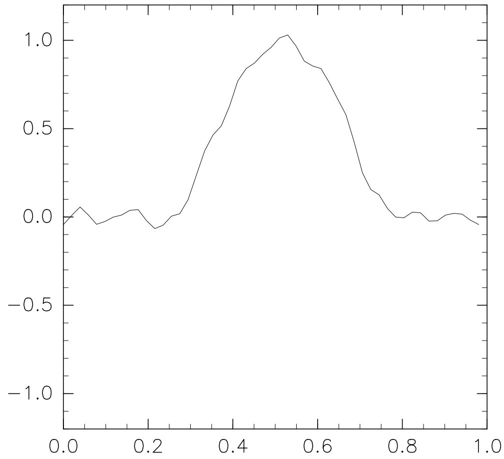

図 11.0.2: $N = 50, \Delta t = \dfrac{1}{100} t = 0.5$

格子点数 50 個, 時間格子間隔を 0.01, 空間ステップを 0.02, として計算した. このとき Curant 数は 0.51 である. この結果が図 11.0.1 と図 11.0.2 である. 図 11.0.1 は 0 秒時, 図 11.0.2 は 0.5 秒時の図である.

移流しているのは見られるが数値分散性も見られる.

3 位の Adams-Bashforce 公式

同様に 3 位の Adams-Bashforce 公式の時も求める. 1 ステップ目と 2 ステップ目の計算では 3 段 3 位公式であるホインの 3 次公式を用いて解く. ホインの 3 次公式を (11.0.1) に当てはめると,

$$
\begin{aligned}
k_1(i\Delta x, n\Delta t) &= -c\Delta t \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} \\
k_2(i\Delta x, n\Delta t) &= -c\Delta t \frac{U_{i+1}^* - U_{i-1}^*}{2\Delta x} \\
k_3(i\Delta x, n\Delta t) &= -c\Delta t \frac{U_{i+1}^{**} - U_{i-1}^{**}}{2\Delta x} \\
U_i^{n+1} &= U_i^n + \frac{1}{4}(k_1 + \frac{1}{3}k_3)
\end{aligned}
$$

となる. このとき,

$$
\begin{aligned}
U_{i+1}^{*} &= U_{i+1}^{n} + \frac{1}{3}k_1((i+1)\Delta x) \\
U_{i-1}^{*} &= U_{i-1}^{n} + \frac{1}{3}k_1((i-1)\Delta x) \\
U_{i+1}^{**} &= U_{i+1}^{n} + \frac{2}{3}k_2((i+1)\Delta x) \\
U_{i-1}^{**} &= U_{i-1}^{n} + \frac{2}{3}k_2((i-1)\Delta x)
\end{aligned}
$$

である．この計算を 2 ステップ行うことで U^{n+1}, U^{n+2} を得ることができる．3 ステップ目以降はこの U^{n+1} と U^{n+2} を 3 位の Adams-Bashforce 公式に当てはめることで求めるられる. 実際に $n+3$ 以降を Adams-Bashforce 公式に当てはめると,

$$
U_i^{n+3} = U_i^{n+2} + \frac{\Delta t}{12}\left(23\frac{U_{i+1}^{n+2} - U_{i-1}^{n+2}}{2\Delta x} - 16\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + 5\frac{U_{i+1}^{n} - U_{i-1}^{n}}{2\Delta x}\right)
$$

となる. 実際に計算するときは, 1 ステップ目と 2 ステップ目で計算した k_1 を用いることで計算量を減らすことができる.

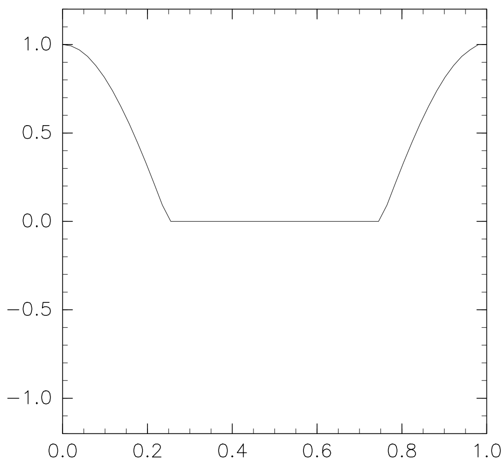

図 11.0.3: $N = 50, \Delta t = \frac{1}{100} t = 0$

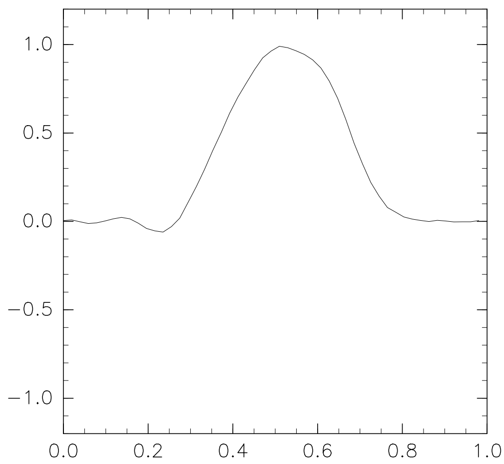

図 11.0.4: $N = 50, \Delta t = \frac{1}{100} t = 0.5$

条件は 2 位公式の時と同様にして計算した結果が図 11.0.3 と図 11.0.4 である．図 11.0.3 は 0 秒時, 図 11.0.4 は 0.5 秒時の図である.

2 位公式のときよりも数値的分散が抑えられている.