

## 振動方程式への応用

本節では振動方程式,

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= f(U, t), \\ f(U, t) &= i\omega U \quad (\omega \in \mathbf{R})\end{aligned}\tag{1}$$

について, 様々な時間差分スキームを適用し, その安定性を調べる. 様々な偏微分方程式は最終的に振動方程式を解く問題に帰着することが多い<sup>1)</sup>.

振動方程式 (1) の一般解は,

$$U(t) = U(0)e^{i\omega t}$$

であり,  $t = n\Delta t$  の場合,

$$U(n\Delta t) = U(0)e^{i\omega n\Delta t}\tag{2}$$

となる.

様々な時間スキームを適用するまえに, フォンノイマン法による安定性解析のため, 増幅係数を定義しておく.

$$\lambda \equiv \frac{U^{n+1}}{U^n}.\tag{3}$$

ただし,

$$\lambda = |\lambda|e^{i\theta}.\tag{4}$$

<sup>1)</sup> 偏微分方程式が振動方程式に帰着する例を 2 つ挙げる.

例 1) 1次元線形移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$u = \text{Re} [U(t)e^{ikx}]$  とおくと,

$$\frac{dU}{dt} + ikcU = 0$$

となつて, 振動方程式 (1) において  $\omega = -kc$  とおいたものに等しくなる.

例 2) 慣性振動

$$\frac{du}{dt} = fv, \quad \frac{dv}{dt} = -fu.$$

複素速度  $U \equiv u + iv$  を導入すると,

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt} &= fv - ifu \\ &= -if(u + iv).\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\frac{dU}{dt} = -ifU.$$

これは,  $\omega = -f$  とした振動方程式である.

この時,

$$U^n = U^0 |\lambda|^n e^{in\theta}. \quad (5)$$

とかける. 安定性は以下の様に評価される.

$$\begin{aligned} |\lambda| > 1 & \quad \text{不安定} \\ |\lambda| = 1 & \quad \text{中立} \\ |\lambda| < 1 & \quad \text{減衰} \end{aligned}$$

位相については, 真の解の位相と数値解の位相との比をとって評価する. 真の解の位相は式 (2) から  $n\omega\Delta t$ , 数値解の位相は式 (5) から  $n\theta$  であるので,

$$\frac{n\theta}{n\omega\Delta t} = \frac{\theta}{\omega\Delta t}.$$

評価は以下の通りである.

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\omega\Delta t} > 1 & \quad \text{位相は数値解の方が速く進む} \\ \frac{\theta}{\omega\Delta t} = 1 & \quad \text{位相は一致} \\ \frac{\theta}{\omega\Delta t} < 1 & \quad \text{位相は数値解の方が遅く進む} \end{aligned}$$

正確な数値解を得るには  $|\lambda|, \frac{\theta}{\omega\Delta t}$  とともに 1 に近い方がよい. そうでない場合, 「計算モード」と呼ばれる偽りの解が現れることもある<sup>2)</sup>. この「計算モード」は  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$  にしても, 真の解に一致しない. 「計算モード」の振幅を抑制するためには,  $|\lambda| < 1$  とした方がよい. 以降の節ではそれぞれのスキームを振動方程式にあてはめた場合の安定性と位相比について考察していく.

## 反復しない 1 段階スキームの安定性

$U^n$  から  $U^{n+1}$  を計算するのに関数  $f$  を 1 回だけ計算する 1 段階スキームを取り扱う. この様なスキームを 1 段階 1 段のスキームなどと呼ぶこともあるが, 以下では反復しない 1 段階スキームと呼ぶことにする. 反復しない 1 段階スキームの一般的な式は,

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t (\alpha f^n + \beta f^{n+1}). \quad (6)$$

<sup>2)</sup>スキームによっては「計算モード」が含まれている. これを取り除くことは基本的にはできない. しかし, 知りたい数値解 (物理モード) に比べて「計算モード」は基本的に小さい. もし, 「計算モード」の  $|\lambda|$  が大きくなると「計算モード」が「物理モード」に比べて有意になってくる. そうした時に偽りの解が現れたように見えるということである.

但し,

$$\alpha + \beta = 1,$$

である.  $\alpha$  と  $\beta$  の与え方によって以下のように分類される.

$$\begin{aligned} \alpha = 1, \beta = 0 & \quad \text{オイラースキーム} \\ \alpha = 0, \beta = 1 & \quad \text{後退スキーム} \\ \alpha = \beta = \frac{1}{2} & \quad \text{台形スキーム} \end{aligned}$$

振動方程式では  $f = i\omega U$  なので, 振動方程式のスキームの一般的な形は,

$$U^{n+1} = U^n + i\omega\Delta t (\alpha U^n + \beta U^{n+1}).$$

と表せる. 増幅係数  $\lambda = \frac{U^{n+1}}{U^n}$  を導入すると,

$$\lambda = 1 + i\omega\Delta t(\alpha + \beta\lambda).$$

ゆえに,  $p \equiv \omega\Delta t$  とおくと,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1 + i\omega\Delta t\alpha}{1 - i\omega\Delta t\beta} \\ &= \frac{1 + i\alpha p}{1 - i\beta p}, \end{aligned}$$

すなわち,

$$\lambda = \frac{1}{1 + \beta^2 p^2} (1 - \alpha\beta p^2 + ip)$$

である. それぞれのスキームについて  $(\alpha, \beta)$  を代入すると,

オイラースキームの場合  $\lambda = 1 + ip$

後退スキームの場合  $\lambda = \frac{1 + ip}{1 + p^2}$

台形スキームの場合  $\lambda = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}p^2} \left( 1 - \frac{1}{4}p^2 + ip \right)$

となる. ここからは, それぞれのスキームについて  $|\lambda|$  を調べる.

オイラースキーム

$$|\lambda| = \sqrt{\lambda\lambda^*} = \sqrt{1 + p^2} > 1.$$

よって、オイラースキームは振動方程式に対し不安定である。但し、 $p = \omega\Delta t \ll 1$  のとき、

$$\begin{aligned} |\lambda| &= 1 + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}p^4 + \dots \\ &= 1 + O(\Delta t^2), \end{aligned}$$

となり、フォンノイマン法の安定性条件は満たしている。

後退スキーム

$$|\lambda| = \sqrt{\lambda\lambda^*} = \frac{1}{1+p^2} \sqrt{1+p^2} = \sqrt{\frac{1}{1+p^2}} < 1$$

よって、後退スキームは  $\Delta t$  の大きさによらず安定である。但し、 $\omega$  が大きいほど減衰率も大きくなる。後退スキームのような振動数によって選択的に減衰させるスキームは、不要な高周波数解を除去するスキーム (フィルター) としても用いられる。

台形スキーム

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sqrt{\lambda\lambda^*} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{4}p^2} \sqrt{\left(1-\frac{1}{4}p^2\right)^2 + p^2} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{4}p^2} \sqrt{\left(1+\frac{1}{4}p^2\right)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

よって、台形スキームは中立である。

以上より、陰的なスキームは  $\Delta t$  の大きさによらず安定である。

## 反復する1段階スキームの安定性

2段のスキーム、すなわち  $U^{n+1}$  をもとめるために関数  $f$  を2回計算するスキームのことを、以下では反復しないスキームと呼ぶことにする。前節と同様に、反復する

1 段階スキームをまとめて表すと,

$$U^{(n+1)*} = U^n + \Delta t f^n, \quad (7)$$

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t (\alpha f^n + \beta f^{(n+1)*}), \quad (8)$$

$$\alpha + \beta = 1.$$

である.  $\alpha$  と  $\beta$  の与え方によって以下のように分類される.

$$\alpha = 0, \beta = 1 \quad \text{松野スキーム}$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \quad \text{ホインスキーム}$$

(7) に振動方程式をあてはめると  $f^n = i\omega U^n$  なので,

$$U^{(n+1)*} = U^n + i\omega \Delta t U^n. \quad (9)$$

また, (8) に振動方程式をあてはめ, (9) を代入すると,

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= U^n + \Delta t (\alpha i\omega U^n + \beta i\omega U^{(n+1)*}) \\ &= U^n + i\omega \Delta t \{ \alpha U^n + \beta (U^n + i\omega \Delta t U^n) \} \\ &= U^n + i\omega \Delta t \{ (\alpha + \beta) U^n + i\omega \Delta t \beta U^n \} \\ &= U^n (1 + i\omega \Delta t - \omega^2 \Delta t^2 \beta) \end{aligned}$$

ここで再び  $p \equiv \omega \Delta t$  とおき, 整理すると,

$$U^{n+1} = (1 - \beta p^2 + ip) U^n.$$

ゆえに, 増幅係数  $\lambda$  は定義から,

$$\lambda = \frac{U^{n+1}}{U^n} = 1 - \beta p^2 + ip \quad (10)$$

である. それぞれのスキームについて  $\beta$  の値を代入すると,

$$\text{松野スキームの場合 } \lambda = 1 - p^2 + ip$$

$$\text{ホインスキームの場合 } \lambda = 1 - \frac{1}{2} p^2 + ip$$

となる. ここからは, それぞれのスキームについて  $|\lambda|$  を調べる.

松野スキーム

松野スキームの場合  $\beta = 1$  であるから、松野スキームの増幅係数は、

$$\lambda = 1 - p^2 + ip, \quad (11)$$

である。先ほど述べたように、安定性を調べるには  $|\lambda|$  を求めればよかった。したがって、

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sqrt{\lambda\lambda^*} \\ &= \sqrt{(1 - p^2 + ip)(1 - p^2 - ip)} \\ &= \sqrt{(1 - p^2)^2 + p^2} \\ &= \sqrt{1 - p^2 + p^4}. \end{aligned} \quad (12)$$

安定となるのは  $|\lambda| \leq 1$  のときなので、 $|p| \leq 1$  であればよい。  $p = \omega\Delta t$  なので、

$$|\omega\Delta t| \leq 1.$$

さらに、 $\Delta t \geq 0$  なので、

$$\Delta t \leq \frac{1}{|\omega|}. \quad (13)$$

松野スキームの  $p$  に対する  $|\lambda|$  の振る舞いを知るために、 $|\lambda|$  の極値を考える。(12) を  $p$  で微分して、

$$\begin{aligned} \frac{d|\lambda|}{dp} &= \frac{4p^3 - 2p}{2\sqrt{p^4 - p^2 + 1}} \\ &= \frac{2p^3 - p}{\sqrt{p^4 - p^2 + 1}} \end{aligned}$$

なので、 $|\lambda|$  は  $p = 1/2$  で極値になることがわかる。  $0 \leq p \leq 1/\sqrt{2}$  の範囲では  $\omega$  が大きいほど  $|\lambda|$  が小さくなる。 Matsuno (1966) では、多数の振動数をもつ系では  $0 < p < 1/\sqrt{2}$  となるように  $\Delta t$  を与える方がよいと指摘している。なぜなら、  $0 < p < 1/\sqrt{2}$  の範囲では  $\omega$  が大きいほど減衰率が大きいので、ノイズとなる可能性のある高周波成分をより早く減衰させることができるからである。

### ホインスキーム

ホインスキームの増幅係数は、(10)において  $\beta = 1/2$  とすればよく、

$$\lambda = 1 + ip - \frac{1}{2}p^2 \quad (14)$$

である. 松野スキームのときと同様にして, 安定性を調べるために  $|\lambda|$  を求める.

$$\begin{aligned}
 |\lambda| &= \sqrt{\lambda\lambda^*} \\
 &= \sqrt{\left(1 + ip - \frac{1}{2}p^2\right)\left(1 - ip - \frac{1}{2}p^2\right)} \\
 &= \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}p^2\right)^2 + p^2} \\
 &= \sqrt{1 + \frac{1}{4}p^4}. \tag{15}
 \end{aligned}$$

(15) は  $p > 0$  で常に 1 より大きくなるので, 振動方程式に対してホインスキームは不安定である. しかし,  $p = \omega\Delta t \ll 1$  のとき  $|\lambda|$  を  $p = 0$  のまわりで展開すると,

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{4}p^4\right)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}p^4 + O(p^8) \\
 &= 1 + \frac{1}{8}p^4 + O(p^8) \\
 &= 1 + O(\Delta t^4).
 \end{aligned}$$

となる. ゆえに,

$$|\lambda| = 1 + O(\Delta t^4) < 1 + O(\Delta t),$$

となり, フォンノイマンの安定性条件を満たす.

1 段階スキームの安定性に関する議論をまとめると次のようになる.

$$\begin{aligned}
 |\lambda_{\text{オイラー}}| &= \sqrt{1 + p^2}, \\
 |\lambda_{\text{後退}}| &= \frac{1}{1 + p^2}, \\
 |\lambda_{\text{台形}}| &= 1, \\
 |\lambda_{\text{松野}}| &= \sqrt{1 - p^2 + p^4}, \\
 |\lambda_{\text{ホイン}}| &= \sqrt{1 + \frac{1}{4}p^4}.
 \end{aligned}$$

それぞれのスキームの増幅係数の大きさを図示すると次のようになる.

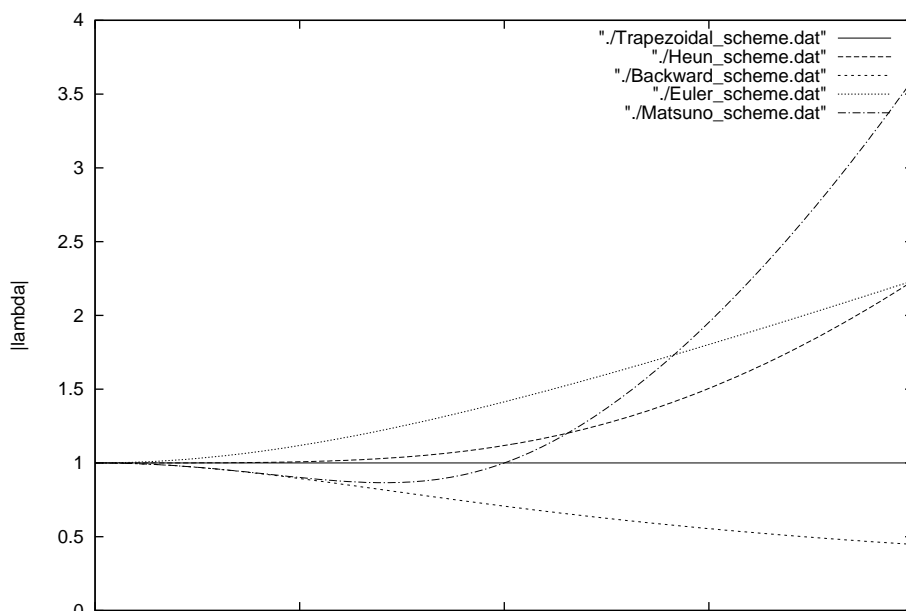


図 19: 5つの1段階スキームの増幅係数の振る舞い。横軸は  $p = 200\Delta t$ , 縦軸は  $|\lambda|$  をとっている。実線はオイラスキーム, 破線は後退スキーム, 細点線は台形スキーム, 1点鎖線は松野スキーム, 点線はホインスキームをそれぞれ表している。