

GFD ワーク 第 1 章は伊理正夫・藤野和建著「数値計算の常識」(以下, 伊理テキスト)の第 1 章を主に参考に行している。

## 誤差の定義と蓄積

### 1.1 誤差の定義

量  $x$  の測定値  $a$  に見込まれる誤差が  $\Delta a (> 0)$  であるというときには,

$$a - \Delta a \leq x \leq a + \Delta a \quad (1.1)$$

であることを意味し,

$$x = a \pm \Delta a \quad (1.2)$$

と表記する<sup>1)</sup>。この  $\Delta a$  を  $x$  の絶対誤差という。実数  $x, y$  の関数として計算される量  $z = f(x, y)$  を考える。  $y$  の測定値を  $b$ , 絶対誤差を  $\Delta b$  とする。ここで,

$$c = f(a, b) \quad (1.3)$$

とおくと,  $z$  は以下のように表せる。

$$z = c \pm \Delta c. \quad (1.4)$$

---

<sup>1)</sup>開区間と閉区間の表記法は以下のとおりである。

開区間  $(a, b) = \{x | a < x < b\}$

閉区間  $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$

左閉右开区間, 左閉半开区間  $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$

左開右閉区間, 右閉半开区間  $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$

$z$  の絶対誤差  $\Delta c$  の取りうる最大値は

$$\begin{aligned}
 (\text{誤差の大きさ}) &= |f(a \pm \Delta a, b \pm \Delta b) - f(a, b)| \\
 &= \left| \left( f(a, b) \pm \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{x=a, y=b} \Delta a \pm \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} \Delta b + \dots \right) - f(a, b) \right| \\
 &= \left| \pm \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{x=a, y=b} \Delta a \pm \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} \Delta b + \dots \right| \\
 &\simeq \left| \pm \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{x=a, y=b} \Delta a \pm \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} \Delta b \right| \\
 &\leq \left| \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{x=a, y=b} \right| \Delta a + \left| \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} \right| \Delta b
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

と表すことができる<sup>2)</sup>. ただし,  $\Delta a, \Delta b, \Delta c$  はあまり大きくないと想定している<sup>3)</sup>.

## 誤差の蓄積

足し算と掛け算では誤差の蓄積の仕方が異なる.  $z = x \pm y$  のとき,

$$\begin{aligned}
 \Delta c &= \left| \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{x=a, y=b} \right| \Delta a + \left| \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} \right| \Delta b \\
 &= \Delta a + \Delta b
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

となる. つまり, 絶対誤差  $\Delta c$  は  $x, y$  の絶対誤差  $\Delta a, \Delta b$  の和となる. また,  $z = xy$  のとき,

$$\begin{aligned}
 \Delta c &= \left| \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{x=a, y=b} \right| \Delta a + \left| \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} \right| \Delta b \\
 &= b\Delta a + a\Delta b
 \end{aligned}$$

すなわち,

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \tag{1.7}$$

となり,  $z$  の相対誤差<sup>4)</sup>  $\frac{\Delta c}{c}$  は  $x, y$  の相対誤差  $\frac{\Delta a}{a}, \frac{\Delta b}{b}$  の和となっていることがわかる.

<sup>2)</sup>この式は変数の符号などによって成り立たないこともある.

( $\Delta a$  の項と  $\Delta b$  の項が打ち消しあって, 2 次以下の項のみが残る場合.) しかし,  $z$  の誤差は大体大雑把でいいので 4 行目程度に見積もっている.

<sup>3)</sup>1 より小さい値.

<sup>4)</sup>測定値に対する測定値の比.

## 参考文献

伊理正夫・藤野和建, 1985: 数値計算の常識, 共立出版