オイラー(Euler) 法の基礎

常微分方程式の数値積分法については別のノートでより多くの種類を詳しく紹介する. ここでは最も原始的な解法であるオイラー法を紹介する[1]).

オイラー法の公式

今, 常微分方程式

$$\frac{\partial x^i(t)}{\partial t} = f(x^1(t), x^2(t), \cdots, x^m(t), t) \quad (a \leq t \leq b,\ i = 1, 2, \cdots, m) \tag{1}$$

$$\text{初期条件} : x^i(a) = x_0$$

を解くことを考える.

オイラー法とは常微分方程式の初期値問題を解くもっとも原始的な解法である. 刻み幅と呼ばれる量 h を仮に置き, 独立変数 t を

$$t_n = a + nh \ (\text{ただし}\ n = 0, 1, 2, \dots) \tag{2}$$

というように刻み幅ごとに変化させたときに, その都度各未知関数の値 $x^i(t_n)$ を刻み幅 h が十分小さいと仮定して

$$x^i(t_n) \approx x^i_n \tag{3}$$

となると近似する. このとき

$$\begin{aligned} f^i_n &\equiv f^i(x^1_n, \dots, x^m_n, t_n) \\ x^i_{n+1} &\approx x^i_n + hf^i_n \end{aligned} \tag{4}$$

1)オイラー法の安定性などの詳しい話も別のノート (「時間差分スキーム : 1 段階スキームの振動方程式への応用」など) でする.

として次々と定めていくことで $x(t)$ を求める. (4) 式を導く.

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = f^i(x_n^1(t), \ldots, x_n^m(t), t_n) \tag{5}$$

左辺の微分を差分で近似すると

$$\frac{x_{n+1}^i - x_n^i}{t_{n+1} - t_n} \approx f_n^i. \tag{6}$$

左辺の分母を (1) 式を用いて変形すると,

$$\frac{x_{n+1}^i - x_n^i}{h} = f_n^i. \tag{7}$$

よって

$$x_{n+1}^i = x_n^i + hf_n^i \tag{8}$$

となる.

$m = 1$ の時の概念図を図 1 にまとめた. この方法は初期条件 x_0^i が与えられているために可能である.

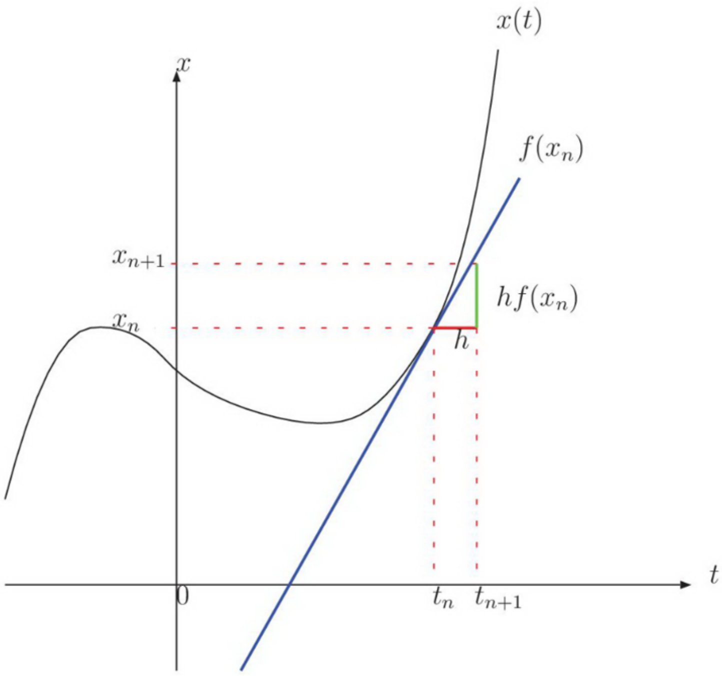

図 1: オイラー法の概念図. 青線は点 (t_n, x_n) での傾き $f(x_n)$ の直線. t_{n+1} のときの値 x_{n+1} が $x(t_{n+1})$ での値と同じと近似して計算していく.

オイラー法の打切り誤差

簡単のため以下では $m = 1$ の場合を考え, オイラー法の打切り誤差 ϵ を求める. $x(t_{n+1})$ を $t = t_n$ の周りでテイラー展開すると,

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)\bigg|_{t=t_n} \cdot h + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)\bigg|_{t=t_n} \cdot h^2 + \cdots \tag{9}$$

となる. 式 (9) を用いて x_{n+1} を x_n を用いて近似すると,

$$x_{n+1} \approx x_n + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)\bigg|_{t=t_n} \cdot h + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x_n}{dt^2}\right)\bigg|_{t=t_n} \cdot h^2 + \cdots \tag{10}$$

と表されるだろう. オイラー法では近似解を $t = t_n$ の周りでテイラー展開した式において 1 次の項までを考慮し,

$$x_{n+1} \approx x_n + hf_n \tag{11}$$

と表される. $x(t_n) = x_n$ としたとき, オイラー法の式 (11) はテイラー展開した式 (9) の 1 次の項まで一致する. このとき, 1 ステップ目の打切り誤差 ϵ は

$$\begin{aligned}\epsilon &= x(t_{n+1}) - x_{n+1}\\ &= x(t_n) + \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)\bigg|_{t=t_n} \cdot h + O(h^2) - (x_n + hf_n)\\ &= O(h^2)\end{aligned} \tag{12}$$

となる[2)].

刻み幅を固定してオイラー法をくりかえし計算した場合の誤差の合計を評価してみよう. $t = t_n$ における x の値 x_n がオイラー法によって計算されたとすると,

$$\begin{aligned}x_n &\approx x_{n-1} + hf_{n-1}\\ &\approx x_{n-2} + hf_{n-2} + hf_{n-1}\\ &\approx x_0 + hf_0 + hf_1 + \cdots hf_{n-2} + hf_{n-1}\end{aligned} \tag{13}$$

となる. それぞれのステップでの誤差はほぼ等しいとすると, n ステップまでの誤差の合計 ε は 1 ステップあたりの誤差 $\times\, n$ とみなせる. オイラー法の 1 ステップあたりの誤差は $O(h^2)$ なので,

$$\varepsilon = n \times O(h^2) \tag{14}$$

[2)] q 次の項までテイラー展開が一致するような数値計算法による誤差は, $O(h^{q+1})$ となる.

となる.

a, b を固定して刻み幅を変化させた場合の誤差の合計 ε を評価してみよう.

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + h \\ &= t_{n-2} + 2h \\ &= a + nh \end{aligned} \tag{15}$$

と表されるので,

$$t = \frac{b-a}{h} \tag{16}$$

となる. よってステップ数 n は $O((b-a)h^{-1})$ となる. したがって ε は

$$\begin{aligned} \varepsilon &= O((b-a)h^{-1}) \times O(h^2) \\ &= O((b-a)h) \end{aligned} \tag{17}$$

となる.

刻み幅を決めるときの注意

実際に問題を解くときに困るのは, 刻み幅 h の値と, その h を用いて得られた数値解がどこまで良く近似しているかという点である. これらについては各論あるが, 結局のところ f^i が良く知られた関数でない限りはよくわからない. 実践的には, 区間 $[a, b]$ で何点かという程度のかなり大きめの h を設定しておき, h の幅を徐々に半分にしていきながら繰り返し同じ問題を解くのが良い. これを試してみると, 最初は h と $\dfrac{h}{2}$ の数値解がかなり食い違うが, 徐々にある値に近づいていく様子が見られる.

積分範囲を固定した場合のオイラー法による数値解の誤差は, 式 (17) より h に比例する. よって h を半分にすると誤差も約半分になるという傾向がある. ある h を与えオイラー法を用いて計算した値を $\tilde{x}$, 真の値を α, 真の値からの数値解の誤差を $\tilde{\epsilon}$ とすると,

$$\tilde{x} = \alpha + \tilde{\epsilon}. \tag{18}$$

さらに h を半分としオイラー法を用いて x を計算する. そのときの値を $\tilde{\tilde{x}}$, 誤差を $\tilde{\tilde{\epsilon}}$ とすると

$$\tilde{\tilde{x}} = \alpha + \tilde{\tilde{\epsilon}}. \tag{19}$$

このとき $\tilde{x}$ と $\tilde{\tilde{x}}$ との差は

$$\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}} = \tilde{\epsilon} - \tilde{\tilde{\epsilon}} \tag{20}$$

となる. 刻み幅 h を半分にすると誤差も半分になるので

$$\begin{aligned}\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}} &= 2\tilde{\tilde{\epsilon}} - \tilde{\tilde{\epsilon}} \\ &= \tilde{\tilde{\epsilon}} \end{aligned} \tag{21}$$

となる. 刻み幅を $h/2$ とした場合の誤差 $\tilde{\tilde{\epsilon}}$ は刻み幅を h とした場合の数値解と刻み幅を $h/2$ とした場合の数値解との差と同じ程度の大きさになる.

刻み幅をさらに半分にしてオイラー法をを用いて計算する場合を考える. このときの数値解の値を $\tilde{\tilde{\tilde{x}}}$ とすると同様に

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{x}} - \tilde{\tilde{\tilde{x}}} &= \frac{\tilde{\tilde{\epsilon}}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\tilde{\epsilon}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}). \end{aligned} \tag{22}$$

よって,「$\tilde{\tilde{x}}$ と $\tilde{\tilde{\tilde{x}}}$ の差が $\tilde{x}$ と $\tilde{\tilde{x}}$ の差の約半分である」ということが,「オイラー法を用いた数値計算が機能している」ことの指標にもなる.

このように数値解法ではさまざまな刻み幅を与えた計算を試みなければならず, しかも最終的な解を求める計算以外は実質無駄である. この「無駄」な手間の量を見積もってみる. 刻み幅を十分大きくとった計算から始め, 刻み幅をその半分, またその半分として計算をくりかえし行い, 刻み幅を h とした場合に最終的な解が得られたと判断する. この最終的な解が得られたときの計算の手間の量を M とする. この計算の一つ前, つまり刻み幅を $2h$ とした場合の計算の手間の量は, 計算の回数が半分になっているので $M/2$ である. さらに刻み幅をその倍, 倍とした場合を考えると, k 回前の計算でかかった手間の量は $M/2^k$ となる. よって「無駄」な手間の量 S は,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{2^k} \\ &= \lim_{k\to\infty}(M - \frac{M}{2^k}) \\ &\leq M \end{aligned} \tag{23}$$

となる. よって多く見積もっても「有効な手間の量」と同じ程度となる. このように, たかだか 2 倍の計算量で結果に対する自信と保証とが得られると考えれば, さ

ほど無駄は大きくないと捉えることもできる．微分方程式の数値解に時々現れる「不安定現象」[3)] や「幻影解」[4)] なども, このように眺めればすぐに発見できる．

[3)] 解の発散のことである．
[4)] 誤差の蓄積によって真の解とかけ離れた解となってしまった数値解のことである．

例題

次の常微分方程式から $x(t)$ を求めよ.

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 1 - x^2,\ x(0) = 0\ (0 \leq t \leq 1.6).$
解析解は $\tanh t$ である. この解析解との誤差を求めよ.

(2) $\dfrac{dx}{dt} = -\omega x,\ x(0) = 1\ (0 \leq t \leq 1.0).$
ここで $\omega = \pi$ とする. 解析解は $\exp(-\omega t)$ である. この解析解との誤差を求めよ.

参考文献

伊理正夫, 藤野和建, 1985,「数値計算の常識」 共立出版, ISBN 4320013433

Mesinger, F., and Arakawa, A., 1976, Numerical methods used in atmospheric models, GARP Publications series (World Meteorological Organization), No. 17, Part 1., 64 pp

石岡 圭一, 2004,「スペクトル法による数値計算入門」, 東京大学出版会, ISBN:4130613057