1.2　物理モードと計算モードについて

物理モードを U_1, 計算モードを U_2 とする. それぞれのモードに対する増幅係数を λ_1,λ_2 とする. n ステップ目の数値解 $U_1^{(n)}, U_2^{(n)}$ はそれぞれ,

$$
\begin{aligned}
U_1^{(n)} &= \lambda_1^n U_1^{(0)},\\
U_2^{(n)} &= \lambda_2^n U_2^{(0)}
\end{aligned}
$$

となる. ここで, $U_1^{(0)}, U_2^{(0)}$ は初期値. λ_1, λ_2 は (9.2.19) 式から,

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \sqrt{1-p^2} + ip,\\
\lambda_2 &= -\sqrt{1-p^2} + ip
\end{aligned}
$$

となる. $|p| < 1$ の場合を考えると $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ より,

$$
\lambda_1 = e^{i\theta}. \tag{10.1.11}
$$

このときの位相は,

$$
\theta = \arctan \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}
$$

になる. $p > 0, p < 0$ の両方の場合を考えると,

$$
\begin{aligned}
\lambda_2 &= e^{i(\pm\pi - \theta)}\\
&= -e^{-i\theta}
\end{aligned} \tag{10.1.12}
$$

となる[1].

数値解 u_j^n は,

$$
u_j^n = \sum_k u_k^{(n\Delta t)} e^{-ik(j\Delta t)}
$$

と表せる. 解が物理モードのみで構成されるとすると,

$$
\begin{aligned}
u_j^n &= \mathrm{Re}\left[\sum_k U_{1,k}^{(n)} e^{-ik(j\Delta x)}\right]\\
&= \mathrm{Re}\left[\sum_k U_{1,k}^{(0)} \lambda_1^{(n)} e^{-ik(j\Delta x)}\right]\\
&= \mathrm{Re}\left[\sum_k U_{1,k}^{(0)} e^{-ik(j\Delta x - \frac{n\theta}{k})}\right]\\
&= \mathrm{Re}\left[\sum_k U_{1,k}^{(0)} e^{-ik(j\Delta x - \frac{\theta}{k\Delta t} n\Delta t)}\right].
\end{aligned} \tag{10.1.13}
$$

[1]詳しくは第 9 章 偏微分方程式の数値解法の基礎 2 (Mesinger and Arakawa,1976: Chapt2) の 2.3 三段階スキームの p17-20 を参照されたい.

解が計算モードのみで構成されるとしても同様に

$$
\begin{aligned}
u_j^n &= \mathrm{Re}\left[\sum_k U_{2,k}^{(n)} e^{-ik(j\Delta x)}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\sum_k U_{2,k}^{(0)} \lambda_2^{(n)} e^{-ik(j\Delta x)}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\sum_k (-1)^n U_{2,k}^{(0)} e^{-ik(j\Delta x + \frac{\theta}{k\Delta t} n\Delta t)}\right]. \qquad (10.1.14)
\end{aligned}
$$

(10.1.13) 式, (10.1.14) 式を解析解のフーリエ表現

$$
u(x,t) = \mathrm{Re}\left[\sum_k U_k^{(0)} e^{-ik(x-ct)}\right]
$$

と比べると, 物理モードの位相速度 c_1 は,

$$
c_1 = -\frac{\theta}{k\Delta t}.
$$

計算モードの位相速度 c_2 は,

$$
c_2 = \frac{\theta}{k\Delta t}
$$

となる. ここで $\Delta t \to 0$ の極限では, $p = -c\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x$ より, $\theta \to p$ となり[2], さらに, $\Delta x \to 0$ の極限を考えると,

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{\theta}{k\Delta t} \\
&\sim -\frac{p}{k\Delta t} \\
&= \frac{c}{k\Delta x}\sin k\Delta x \\
&\sim c
\end{aligned}
$$

[2] $\Delta t \to 0$ の極限では,

$$
\begin{aligned}
p &= -c\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x \\
&\sim 0
\end{aligned}
$$

となって,

$$
\begin{aligned}
\theta &= \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right) \\
&\sim \arctan\left(p - \frac{1}{2}p^3\right) \\
&\sim p
\end{aligned}
$$

となる.

となる. 同様に求めると, $c_2 = -c$.

よって, 物理モードの位相速度は $\Delta t \to 0, \Delta x \to 0$ のとき, c に一致し, 計算モードの位相速度は $\Delta t \to 0, \Delta x \to 0$ のとき, $-c$ となる. 更に (10.1.14) 式で $(-1)^n$ がかかっているので, 計算モードは 1 ステップごとに符号を変える.