Asselin (1972) の時間フィルター

増田 和孝

2013 年 04 月 11 日

本稿では, 大気・海洋の数値モデルにおいてよく用いられている Asselin (1972) の時間フィルターについて解説する.

1 はじめに: Robert (1966) の時間フィルター

Asselin (1972) の時間フィルターは Robert (1966) の時間フィルターに基づいて考案されたものである. Robert (1966) の時間フィルターは以下のようなものである. 常微分方程式

$$\frac{dU}{dt} = f(U, t)$$

をリープ・フロッグスキームを用いて差分化すると,

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t f(U^n, n\Delta t) \tag{1}$$

と表される. ここで Δt は時間格子間隔, $U^n = U(n\Delta t)$ である. これを基に Robert (1966) は以下のようなスキームを考案した.

$$U^{n+1,*} = U^{n-1} + 2\Delta t f(U^{n,*}, n\Delta t), \tag{2}$$
$$U^n = U^{n,*} + 0.01(U^{n+1,*} - 2U^{n,*} + U^{n-1}). \tag{3}$$

上付き添字 $*$ はフィルターをかける前の値であることを表す.

Robert (1966) がこのようなフィルターを考案した目的は, 摩擦項を含むプリミティブ方程式を安定に計算することであった. そこで摩擦方程式に上記のスキームを当てはめた場合の数値解の振舞いを, フォン・ノイマン法を用いて調べる.

まず式 (1) を用いて摩擦方程式を差分化すると,

$$U^{n+1} = U^{n-1} - 2\alpha \Delta t U^n \tag{4}$$

となる. 増幅係数を $\lambda \equiv U^{n+1}/U^n$ と定義すると, λ の満たす方程式は

$$\lambda^2 + 2\alpha\Delta t\lambda - 1 = 0.$$

したがって

$$\lambda_{\pm} = \alpha\Delta t \pm \sqrt{1 + (\alpha\Delta t)^2} \tag{5}$$

となる. λ_+ が物理モード, λ_- が計算モードに対応する. 明らかに物理モードの増幅係数の絶対値は 1 より大きくなるので, 数値解は不安定である.

次に Robert (1966) のスキームを用いて摩擦方程式を差分化する. 式 (3) を作用する前後での数値解の比を $\mu = U^n/U^{n,*}$ と定義すると,

$$\mu U^{n,*} = U^{n,*} + 0.01(U^{n+1,*} - 2U^{n,*} + \mu U^{n-1,*})$$

である. 摩擦方程式の解 $U^{n,*} = U_0 e^{-\alpha n\Delta t}$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1 + 0.01(e^{-\alpha\Delta t} - 2)}{1 - 0.01e^{\alpha\Delta t}} \\
&\approx \frac{1 + 0.01(1 - \alpha\Delta t - 2)}{1 - 0.01(1 + \alpha\Delta t)} \\
&= \frac{1 - 0.01(1 + \alpha\Delta t)}{1 - 0.01(1 + \alpha\Delta t)} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{6}$$

$e^x \approx 1 + x$ とおくと 1 になった. ここで $\alpha\Delta t \ll 1$ として近似を行った. よって, フィルターの前後で U の値は変わらないことになるが, それではフィルターの意味がない. (数値解の不安定性は抑制されない.) よってここの計算は間違っていると思われるが, よくわからない. 詳しくは Robert(1965) を参照する必要がある.

2　Asselin (1972) の時間フィルター

Asselin (1972) は Robert (1966) で用いられたフィルターを一般化した

$$U^n = U^{n,*} + 0.5\nu(U^{n+1,*} - 2U^{n,*} + U^{n-1}) \tag{7}$$

をリープ・フロッグスキームで離散化された振動方程式において, 計算モードと高周波の物理モードを減衰させるために用いることを提案した.

2.1　基本的な性質

式 (7) のフィルターを振動方程式に適用した際の基本的な性質は, 振動方程式

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U \tag{8}$$

の厳密解

$$U^* = U_0 e^{i\omega t}$$

と, それにフィルターを作用させた解 U との比 $\mu \equiv U/U^*$ を考察することである程度把握することができる. 式 (7) において

$$U^{n,*} = U_0 e^{i\omega n\Delta t}, \quad U^n = \mu U^{n,*}$$

を代入すると,

$$\mu e^{i\omega n\Delta t} = e^{i\omega n\Delta t} + 0.5\nu(e^{i\omega(n+1)\Delta t} - 2e^{i\omega n\Delta t} + \mu e^{i\omega(n-1)\Delta t}).$$

$$\mu = 1 + 0.5\nu(e^{i\omega\Delta t} - 2 + \mu e^{-i\omega\Delta t}).$$

これを μ について解くと,

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1 + 0.5\nu(e^{i\omega\Delta t} - 2)}{1 - 0.5\nu e^{-i\omega\Delta t}} \\
&= \frac{1 + 0.5\nu(e^{i\omega\Delta t} - 2)}{1 - 0.5\nu\cos\omega\Delta t + 0.5\nu i\sin\omega\Delta t} \\
&= \frac{\left\{1 + 0.5\nu(e^{i\omega\Delta t} - 2)\right\}(1 - 0.5\nu\cos\omega\Delta t - 0.5\nu i\sin\omega\Delta t)}{(1 - 0.5\nu\cos\omega\Delta t)^2 + (0.5\nu)^2\sin^2\omega\Delta t} \\
&= \frac{\left\{1 + 0.5\nu(e^{i\omega\Delta t} - 2)\right\}(1 - 0.5\nu e^{i\omega\Delta t})}{1 - \nu\cos\omega\Delta t + (0.5\nu)^2\cos^2\omega\Delta t + (0.5\nu)^2\sin^2\omega\Delta t} \\
&= \frac{1 - 0.5\nu e^{i\omega\Delta t} + 0.5\nu(e^{i\omega\Delta t} - 2) - (0.5\nu)^2 e^{i\omega\Delta t}(e^{i\omega\Delta t} - 2)}{1 - \nu\cos\omega\Delta t + (0.5\nu)^2} \\
&= \frac{1 - \nu - (0.5\nu)^2 e^{i\omega\Delta t}(e^{i\omega\Delta t} - 2)}{1 - \nu\cos\omega\Delta t + (0.5\nu)^2} \\
&= \frac{4 - 4\nu - \nu^2 e^{2i\omega\Delta t} + 2\nu^2 e^{i\omega\Delta t}}{4 - 4\nu\cos\omega\Delta t + \nu^2} \\
&= \frac{(2-\nu)^2 - \nu^2 - \nu^2 e^{2i\omega\Delta t} + 2\nu^2 e^{i\omega\Delta t}}{(2-\nu)^2 + 4\nu(1 - \cos\omega\Delta t)} \\
&= \frac{(2-\nu)^2 + \nu^2 e^{i\omega\Delta t}(-e^{-i\omega\Delta t} - e^{i\omega\Delta t} + 2)}{(2-\nu)^2 + 4\nu(1 - \cos\omega\Delta t)} \\
&= \frac{(2-\nu)^2 + 2\nu^2(1 - \cos\omega\Delta t)e^{i\omega\Delta t}}{(2-\nu)^2 + 4\nu(1 - \cos\omega\Delta t)} \\
&= R(\nu,\omega)e^{i\delta(\nu,\omega)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

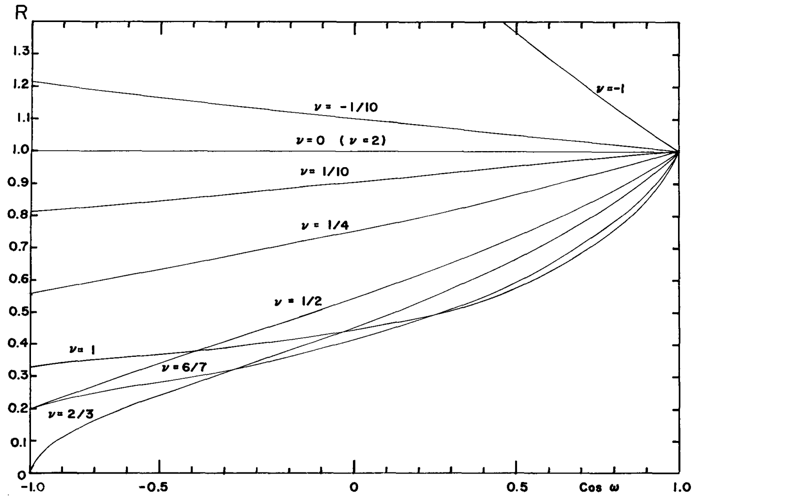

FIGURE 1.—Amplitude response due to application of the time filter to a periodic function for a few values of the filter coefficient. The response of a conventional centered filter is a straight line with intercepts $1-\nu$ at $\cos\omega=0$ and 1 at $\cos\omega=1$.

図 1: 時間フィルターのフィルター係数のグラフ. 縦軸は振幅の変調, 横軸は周期関数である. 図には横軸は $\cos\omega$ となっているが, 本文中の $\cos\omega\Delta t$ のことである.

ここで

$$
\begin{aligned}
R(\nu,\omega) &\equiv \frac{\sqrt{[(2-\nu)^2+2\nu^2(1-\cos\omega\Delta t)\cos\omega\Delta t]^2+[2\nu^2(1-\cos\omega\Delta t)\sin\omega\Delta t]^2}}{(2-\nu)^2+4\nu(1-\cos\omega)}, \\
\delta(\nu,\omega) &\equiv \tan^{-1}\left(\frac{2\nu^2(1-\cos\omega\Delta t)\sin\omega\Delta t}{(2-\nu)^2+2\nu^2(1-\cos\omega\Delta t)\cos\omega\Delta t}\right)
\end{aligned}
$$

である. R はフィルターによる振幅の変調, δ は位相のずれを表す. ν をパラメータとし, R,δ を $\cos\omega\Delta t$ の関数として図示したものが図 1 と図 2 である.

- $0.5 \le \nu \le 1$ の範囲では, R の $\cos\omega\Delta t$ に対する変化の様子はあまり ν の値によらない.
- 振動数が大きいほど解析解に比べ位相は早く進む. $\nu = 0.25$ になると位相のずれはほとんどなくなる.

3 振動方程式への適用

次に実際に式 (8) を離散化した式に時間フィルター (7) を適用した場合の数値解の振舞いについて考察する. 実際の問題への応用を考慮し, 式 (8) における振動数は

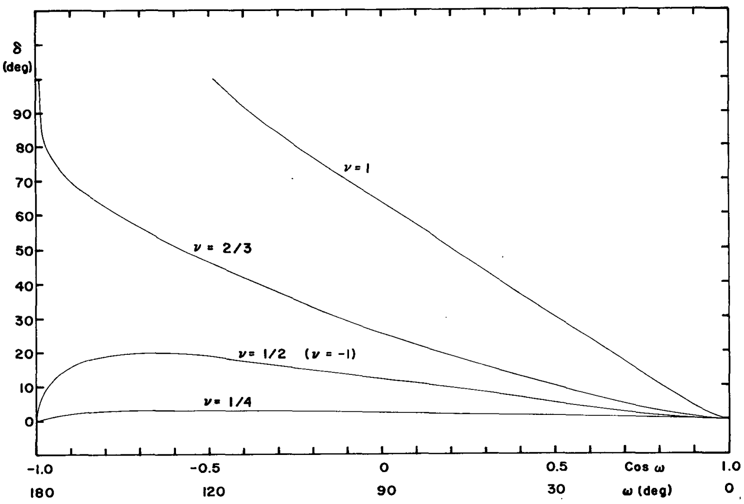

FIGURE 2.—Phase increase due to application of the time filter to a periodic function for a few values of the filter coefficient.

図 2: 時間フィルターのフィルター係数のグラフ. 縦軸は位相のずれ, 横軸は周期関数である.

低周波成分 ω_L と高周波成分 ω_H の重ね合わせで表されるとする.

$$\frac{dU}{dt} = i(\omega_L + \omega_H)U \tag{10}$$

そして低周波成分に対してはリープフロッグスキーム, 高周波成分に対しては陰的な時間差分スキームである台形スキームを用いて離散化する.

$$\frac{U^{n+1,*} - U^{n-1,*}}{2\Delta t} = i\omega_L U^{n,*} + i\omega_H \frac{U^{n+1,*} + U^{n-1,*}}{2}.$$

ここで時刻 $(n-1)\Delta t$ における数値解には時間フィルター (7) がかけられていると すると,

$$\frac{U^{n+1,*}-U^{n-1}}{2\Delta t} = i\omega_L U^{n,*} + i\omega_H \frac{U^{n+1,*}+U^{n-1}}{2} \tag{11}$$

となる.

増幅係数 λ を $\lambda \equiv U^{n+1,*}/U^{n,*}$ と定義し, 式 (11), (7) から λ を求めると以下のようになる[1].

$$\lambda_{\pm} = \frac{\nu + 2i\omega_L\Delta t \pm \sqrt{(\nu-2)^2 + 4(\omega\Delta t)^2(1-\nu) + 4\omega\omega_L(\Delta t)^2(\nu-2)}}{2(1-i\omega_H\Delta t)}. \tag{12}$$

3.1　台形スキームの場合

$\omega_L = 0$ として台形スキームを用いた場合について考察する. このとき増幅係数は式 (12) に $\omega_L = 0$ を代入して

$$\lambda_{\pm} = \frac{1+i\omega\Delta t}{1+(\omega\Delta t)^2}\left(\frac{\nu}{2} \pm \sqrt{1+(\omega\Delta t)^2 + \frac{\nu^2}{4} - \nu(1+(\omega\Delta t)^2)}\right) \tag{13}$$

となる. $\nu \le 1$ の場合, 根号の被関数の符号は必ず正となるため, 位相のずれ

$$\delta \equiv \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}[\lambda_{\pm}]}{\mathrm{Re}[\lambda_{\pm}]}\right) = \tan^{-1}(\omega\Delta t)$$

は ν に依存しなくなる. また, 根号の被関数は

$$\begin{aligned} & 1+(\omega\Delta t)^2 + \frac{\nu^2}{4} - \nu(1+(\omega\Delta t)^2) \\ = & \left(\sqrt{1+(\omega\Delta t)^2} \mp \nu/2\right)^2 \pm \nu\sqrt{1+(\omega\Delta t)^2} - \nu(1+(\omega\Delta t)^2) \\ < & \left(\sqrt{1+(\omega\Delta t)^2} \mp \nu/2\right)^2 \end{aligned}$$

であることから, $\omega > 0, \nu > 0$ の場合の増幅係数の絶対値 $|\lambda_{\pm}|$ は

$$|\lambda_{\pm}| < 1$$

となる.

[1]詳しい導出は付録を参照.

3.2　リープフロッグスキームの場合

次に $\omega_H = 0$ としてリープフロッグスキームを用いた場合について考察する. このとき増幅係数は式 (12) に $\omega_H = 0$ を代入して

$$\lambda_\pm = \frac{\nu}{2} + i\omega\Delta t \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)^2 - (\omega\Delta t)^2} \tag{14}$$

となる.

$\omega\Delta t \le 1 - \nu/2$ の場合,

$$\begin{aligned}
|\lambda_\pm|^2 &= (\nu/2)^2 + (1-\nu/2)^2 - (\omega\Delta t)^2 \pm \nu\sqrt{(1-\nu/2)^2 - (\omega\Delta t)^2} + (\omega\Delta t)^2 \\
&= (\nu/2)^2 + (1-\nu/2)^2 \pm \nu\sqrt{(1-\nu/2)^2 - (\omega\Delta t)^2} \\
&\le (\nu/2)^2 + (1-\nu/2)^2 \pm \nu\sqrt{(1-\nu/2)^2} \\
&= (\nu/2 \pm (1-\nu/2))^2 \\
&= \begin{cases} 1 \\ (\nu-1)^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

となり, $0 < \nu < 2$ であれば $|\lambda_\pm| \le 1$ である.

一方 $\omega^2 > (1-\nu/2)^2$ となって式の根号の被関数の符号が負になる場合,

$$|\lambda_\pm|^2 = \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + \left(\omega\Delta t + \sqrt{(\omega\Delta t)^2 - \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)^2}\right)^2$$

から $|\lambda_\pm| \le 1$ となる条件として、

$$(\omega\Delta t)^2 + (\omega\Delta t)\sqrt{(\omega\Delta t)^2 - (1-\nu/2)^2} - (1-\nu/2) < 0 \tag{15}$$

が得られる. $\nu = 1$ の場合にこれを満たす $\omega\Delta t$ は $\omega\Delta t < 0.57$ の範囲にある.

付録

式 (11), (7) から λ を求める. λ と μ を用いて, 式 (11) を変形すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^2 U^{n-1,*} - \mu U^{n-1,*}}{2\Delta t} &= i\omega_L \lambda U^{n-1,*} + i\omega_H \frac{\lambda^2 U^{n-1,*} + \mu U^{n-1,*}}{2}, \\
\frac{\lambda^2 - \mu}{2\Delta t} &= i\omega_L \lambda + i\omega_H \frac{\lambda^2 + \mu}{2},
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{2\Delta t} - i\omega_H \frac{1}{2}\right)\lambda^2 - i\omega_L \lambda - \left(\frac{1}{2\Delta t} + i\omega_H \frac{1}{2}\right)\mu = 0. \qquad \text{(a)}$$

また, 式 (7) は,

$$\begin{aligned}
\mu\lambda U^{n-1,*} &= \lambda U^{n-1,*} + 0.5\nu(\lambda^2 U^{n-1,*} - 2\lambda U^{n-1,*} + \mu U^{n-1,*}),\\
\mu &= \frac{\lambda + 0.5\nu(\lambda^2 - 2\lambda)}{\lambda - 0.5\nu},\\
&= \frac{\lambda(2+\nu(\lambda-2))}{2\lambda - \nu}.
\end{aligned}$$

式 (a) に代入すると,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2\Delta t} - i\omega_H \frac{1}{2}\right)\lambda^2 - i\omega_L \lambda - \left(\frac{1}{2\Delta t} + i\omega_H \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\lambda(2+\nu(\lambda-2))}{2\lambda-\nu}\right) &= 0,\\
\left(\frac{1}{2\Delta t} - i\omega_H \frac{1}{2}\right)(2\lambda-\nu)\lambda - i\omega_L(2\lambda-\nu) - \left(\frac{1}{2\Delta t} + i\omega_H \frac{1}{2}\right)\{2+\nu(\lambda-2)\} &= 0,\\
(1-i\omega_H)\lambda^2 - \left(\frac{1}{2} - i\omega_H\Delta t\frac{1}{2}\right)\lambda\nu - i\omega_L\Delta t(2\lambda-\nu) - (1+i\omega_H)(1-\nu) - \left(\frac{1}{2} + i\omega_H\Delta t\frac{1}{2}\right)\lambda\nu &= 0,\\
(1-i\omega_H)\lambda^2 - (1-i\omega_H\Delta t)\lambda\nu - i\omega_L\Delta t(2\lambda-\nu) - (1+i\omega_H\Delta t)(1-\nu) &= 0,\\
(1-i\omega_H\Delta t)\lambda^2 - (\nu+2i\omega_L\Delta t)\lambda + i\omega_L\Delta t\nu - (1+i\omega_H\Delta t)(1-\nu) &= 0.
\end{aligned}$$

よって,

$$\lambda_\pm = \frac{\nu + 2i\omega_L\Delta t \pm \sqrt{(\nu+2i\omega_L\Delta t)^2 - 4(1-i\omega_H\Delta t)\{i\omega_L\Delta t\nu - (1+i\omega_H\Delta t)(1-\nu)\}}}{2(1-i\omega_H\Delta t)}$$

平方根の中身は,

$$\begin{aligned}
&(\nu+2i\omega_L\Delta t)^2 - 4(1-i\omega_H\Delta t)\{i\omega_L\Delta t\nu - (1+i\omega_H\Delta t)(1-\nu)\}\\
&= \nu^2 + 4i\omega_L\Delta t\nu - 4\omega_L^2\Delta t^2 - 4(1-i\omega_H\Delta t)i\omega_L\Delta t\nu + 4(1+\omega_H^2\Delta t^2)(1-\nu)\\
&= (\nu-2)^2 - 4\Delta t^2(\omega_L^2 - \omega_H^2) - 4\omega_H(\omega_H+\omega_L)\Delta t^2\nu\\
&= (\nu-2)^2 - 4\Delta t^2\omega(\omega_L - \omega_H) - 4\omega_H\omega\Delta t^2\nu\\
&= (\nu-2)^2 - 4\Delta t^2\omega(\omega_L - \omega + \omega_L) - 4(\omega-\omega_L)\omega\Delta t^2\nu\\
&= (\nu-2)^2 + 4(\omega\Delta t)^2(1-\nu) + 4\omega\omega_L\Delta t^2(\nu-2)
\end{aligned}$$

ここで, $\omega = \omega_L + \omega_L$ としている. よって,

$$\lambda_\pm = \frac{\nu + 2i\omega_L\Delta t \pm \sqrt{(\nu-2)^2 + 4(\omega\Delta t)^2(1-\nu) + 4\omega\omega_L(\Delta t)^2(\nu-2)}}{2(1-i\omega_H\Delta t)}.$$

参考文献

Asselin, R. A., 1972: Frequency filter for time integrations. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 487–490.

Robert, A. J. year: 1966 title: The integration of a low order spectal form of the primitive meteorological equations. *J. Meteor. Soc. Japan*, **44**, 237–245.

Robert, A. J. year: 1965