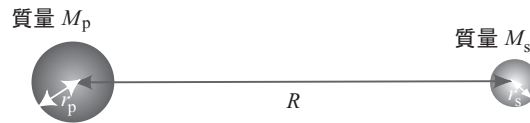


# 地球惑星状態物理学 1 2007 年前期試験

学年 \_\_\_\_\_ 番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

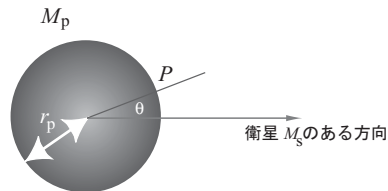
## 1. 潮汐

ある惑星の周りを公転する衛星がある。惑星の半径と質量をそれぞれ  $r_p$  および  $M_p$ 、衛星の半径と質量をそれぞれ  $r_s$  および  $M_s$ 、両者の間の距離を  $R$ 、万有引力定数を  $G$  とする。また、天体の半径は  $R$  に比べて十分小さいものとする。



### (a) 惑星の表面における起潮力ポテンシャル

この衛星によって惑星には潮汐力（起潮力）が働く。惑星の表面で、惑星と衛星を結ぶ直線からの角度が  $\theta$  の点  $P$  における起潮力ポテンシャル  $U_{sp}(\theta)$  を表す式を書け。



### (b) 衛星の表面における起潮力ポテンシャル

同様に衛星の表面における、惑星がおよぼす潮汐力ポテンシャル  $U_{ps}(\theta)$  を表す式を書け。

### (c) 潮汐力ポテンシャルの比

惑星と衛星は一樣に同じ密度の物質から出来ていると仮定し、 $U_{sp}(\theta)$  と  $U_{ps}(\theta)$  の最大値の比をなるべく簡単な形で表せ。

## 2. プレート運動

プレート（リソスフェア）の実体およびその運動の地球物理学的な意義を、地球内部の熱構造やその歴史と関連づけつつ、わかりやすく説明せよ。

## 3. 極運動

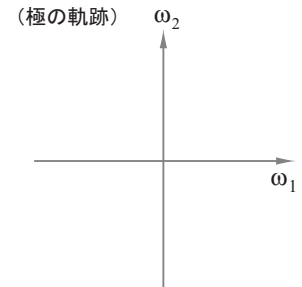
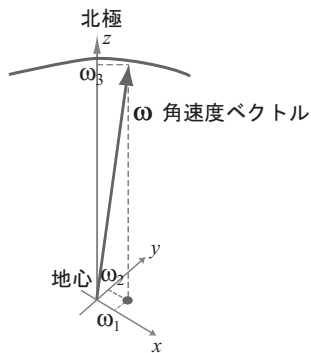
地球の瞬間自転軸が慣性主軸からずれると極運動（Chandler 運動）が始まる。角速度ベクトル  $\omega$  の三成分を  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  とすると、地球に対する  $\omega_1$  と  $\omega_2$  の変化が極運動となる。 $\omega_3$ （自転角速度、24 時間で  $2\pi$ ）は一定でその値を  $n$  とすると、 $\omega_1$  と  $\omega_2$  は次のような連立微分方程式を満たす。

$$\dot{\omega}_1 = -hn\omega_2 \quad \dot{\omega}_2 = hn\omega_1$$

ただし  $h$  は力学的扁率で、地球の慣性モーメントを  $A, B, C$  としたときに  $h = (C - A)/A$  であらわされる量である。変数の上のドットは時間微分を表す。

### (a) 極運動の軌跡

上記の式を満たす  $(\omega_1, \omega_2)$  の軌跡の一例を求めて式を示せ。またそれを下右の図に描き入れよ（動く向きも示すこと）。



### (b) 地球の自転変動の原因

極運動や自転速度の変動はどのような現象によって励起されると考えられているか説明せよ。

#### 4. 地磁気

地磁気のポテンシャル  $W$  の主成分は、地球中心に南北に置いた双極子がつくる磁場であり、

$$W(r, \theta) = \frac{R^3}{r^2} g_{10} \sin \theta$$

と表される。ただし  $r$  は地球中心からの距離、 $R$  は地球の半径、 $\theta$  は緯度、 $g_{10}$  は双極子モーメントの大きさを表す係数である。

##### (a) 地磁気の水平成分と鉛直成分

地磁気ポテンシャル  $W$  から、地表における緯度  $\theta$  の点での磁場の南北、東西、上下成分をそれぞれ導け。

##### (b) 地磁気の偏角、伏角、全磁力

地磁気ポテンシャルがこの形で表され、 $g_{10}$  が負である場合（正磁極期）北極点、赤道直下、南極点の地表における磁場の伏角は何度になるか。また赤道と北極点での全磁力の比は何対何になるか。

#### 5. 重力

地球の重力場はどのような原因で時間変化するか。(1) 永年的、(2) 周期的、(3) 突発的な変化に分けて具体例を挙げて説明せよ。

## 1. 潮汐

(a) 惑星の表面における起潮力ポテンシャル

解答例

衛星の方向と  $\theta$  の角度にある惑星表面の点における衛星による潮汐力ポテンシャル  $U_{sp}$  は

$$U_{sp} = \frac{GM_s r_p^2}{R^3} P_{20}(\cos \theta)$$

ただし  $P_{20}(\cos \theta)$  は次数 2 の球関数で

$$P_{20}(\cos \theta) = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}$$

で表される。

(b) 衛星の表面における起潮力ポテンシャル

解答例

前問と同様に

$$U_{ps} = \frac{GM_p r_s^2}{R^3} P_{20}(\cos \theta)$$

(c) 潮汐力ポテンシャルの比

解答例

球関数  $P_{20}(\cos \theta)$  の最大値は 2 なので、最大値どうしの比は

$$U_{sp}^{max} : U_{ps}^{max} = 2 \frac{GM_s r_p^2}{R^3} : 2 \frac{GM_p r_s^2}{R^3} = M_s r_p^2 : M_p r_s^2$$

ここで、両天体が一様で密度  $\rho$  とすると、上記の比は

$$M_s r_p^2 : M_p r_s^2 = \frac{4\pi r_s^3}{3} \rho r_p^2 : \frac{4\pi r_p^3}{3} \rho r_s^2 = r_s : r_p$$

すなわち、同じ材質から成る惑星と衛星が潮汐力を及ぼしあう場合、衛星における潮汐力の方が惑星表面における潮汐力より大きくなる。

## 2. プレート運動

解答例

自由に記述して差し支えないが、次の点が含まれていること。

(a) リソスフェアの実体

リソスフェアは、地球の表層にあって温度が比較的低いため流動性に乏しい（粘性が大きい）部分である。

(b) プレート運動の熱学的意味

地球のリソスフェアはプレートに分かれて互いに運動しているが、これらの運動は地球内部の熱を宇宙空間に逃がす役目を果たしている。

### 3. 極運動

解答例

#### (a) 極運動の軌跡

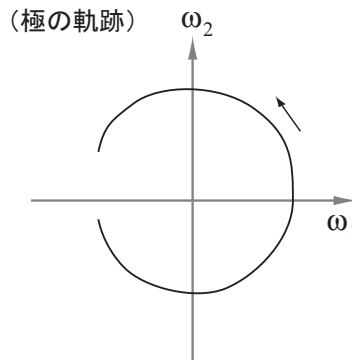
連立微分方程式

$$\dot{\omega}_1 = -hn\omega_2 \quad \dot{\omega}_2 = hn\omega_1$$

の特殊解は、最初の式を時間微分してあとの式に代入すれば得られる。たとえば

$$\omega_1 = a \cos(hnt + \alpha) \quad \omega_2 = a \sin(hnt + \alpha)$$

ただし  $\alpha$  は初期位相、 $a$  は極運動の振幅である。この式で表される軌跡は、点  $(\omega_1, \omega_2)$  が中心の周りを反時計回りに角速度  $hn$  で円を描くものになる。



#### (b) 地球の自轉變動の原因

極運動は地球の自転軸が地球の形状軸（慣性主軸）からずれることによって励起される。その原因としては、かつては地震の断層ずれに伴う質量の移動などが考えられたが、今日では大気や海洋が地表を動くことによる励起が大きいと考えられている。

自転速度の変動の比較的短周期のものは、大部分が大気との角運動量の交換によるものである。自転速度の永年減速は、海洋潮汐摩擦を通じた月との角運動量の交換によるものである。他にも十年程度の周期を持つ自転速度変動が知られているがその原因はまだ良くわかっていない。

### 4. 地磁気

解答例

#### (a) 地磁気の鉛直成分と水平成分

任意の点（地心距離  $r$ 、緯度経度  $\theta, \phi$ ）における地磁気ベクトルの鉛直成分と南北成分はそれぞれ

$$F_r = -\frac{\partial W}{\partial r} = 2\frac{R^3}{r^3}g_{10} \sin \theta \quad F_\theta = -\frac{\partial W}{r\partial \theta} = -\frac{R^3}{r^3}g_{10} \cos \theta$$

となる。地表なので  $r = R$  とすると

$$F_r = 2g_{10} \sin \theta \quad F_\theta = -g_{10} \cos \theta$$

となる。なお  $W$  には  $\phi$  が入ってないので地磁気の東西成分  $F_\phi$  はゼロである。

#### (b) 地磁気の偏角、伏角と全磁力

$F_r$  は赤道でゼロ、すなわち伏角は赤道でゼロとなる。一方北極と南極では  $F_\theta = 0$  であり、正磁極期（ $g_{10}$  は負）は  $F_r$  は北極で下向き、南極では上向きである。従って伏角は北極で 90 度、南極で

-90度である。赤道と極での全磁力の比は  $F_r$  の式に入っているファクター「2」のために1:2となる。

## 5. 重力

### 解答例

重力観測衛星 GRACE の打ち上げによって昨今は重力のわずかな時間変化が観測によってとらえられるようになった。そのうちいくつかの例を挙げる。

永年変化：後氷期回復（Post-glacial rebound）による北米東北部やスカンジナビア半島の上昇に伴う重力の増加（ただし地表で観測すると地殻の上昇による重力の減少の方が大きく見える）。また地球温暖化に伴う山岳氷河や大陸氷床の縮小によってアラスカ南部やグリーンランド南部では重力が減少しつつある。いずれも年間数マイクロガルというわずかなものである。

季節変化：降水量の季節変化にともなって陸水量が増減するため、雨季と乾季がはっきりした熱帯の陸地では場所によっては十マイクロガルを超える振幅を持つ重力の季節変化が見られる。

突然の変化：地震にともなう断層ずれは質量の移動をもたらす。したがって地震による重力の変化が予測される。スマトラ地震に伴って数マイクロガルの重力変化が観測されたが、世界的にみるとまだ観測例は少ない。