

物理学（力学） 学期末試験 2009/8/05

担当：日置幸介（理学研究院・自然史科学部門・地球惑星ダイナミクス分野）

1. ニュートンの法則

(a) 法則

ニュートンの運動に関する三つの法則（慣性の法則、運動の法則、作用反作用の法則）について説明せよ。

(b) 力

図1のように、それぞれ m_1 と m_2 の質量をもつ二つの球が異なる速さ v_1 と v_2 で右向きに動いていた。それらは衝突ののちに速度 v'_1 と v'_2 に変わった。この時運動量の和は次の式であらわされるように保存されることが知られている。

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

このことが、ニュートンの運動の法則と作用反作用の法則から導かれることを図と数式を用いて示せ（ヒント：運動方程式を運動量 $p = mv$ を用いて表し、時間で積分、また衝突時に両方の球に働く力について作用反作用の法則を適用する）。



図1. 二つの球の衝突。

2. 振動

ポテンシャルエネルギー U が x の関数であり

$$U(x) = \frac{1}{2}cx^2$$

で表わされるとする（ c は定数）。この場における質量 m の物体の運動について以下の設問に答えよ。

(a) 力

物体の重心の座標が x のとき、物体に働く x 軸方向の力を符号も含めて求めよ。

(b) 運動方程式とその一般解

この物体の x 軸方向の運動方程式を書き、その一般解を求めよ。なお時刻を表す変数は t とする。

(c) 初期条件を与えた場合の特殊解

時刻ゼロにおける物体の位置と速度をそれぞれ x_0 とゼロとしたときのこの運動方程式の特殊解を求めよ。

(d) 力学的エネルギー

上で求めた特殊解を用いて、この物体の力学的エネルギー（ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの和）が一定になることを示せ。

(e) 抵抗

この物体に速度に比例する抵抗力 $-k\dot{x}$ が働くとする。この場合運動が振動解を持つためには抵抗の大きさはある条件を満たす必要がある。 k が満たすべき条件を求めよ。

3. 角運動量

三次元空間の中のある物体の運動量ベクトルを、 $p = (p_x, p_y, p_z)$ 、その物体の位置ベクトルを $r = (r_x, r_y, r_z)$ としたとき、この物体が持つ角運動量ベクトル L の各成分 (L_x, L_y, L_z) を、ベクトル p と r の成分を用いて表せ。またベクトル p および r と、ベクトル L との方向および大きさの関係を図で説明せよ。

4. ケプラー運動

(a) 極座標での速度

二次元の直交座標 (x, y) と、極座標 (r, θ) を比較する。直交座標での速度 (v_x, v_y) は、 (\dot{x}, \dot{y}) で表されるが、極座標での速度 (v_r, v_θ) は \dot{r} や $\dot{\theta}$ 等を用いてどのように表せるか。

(b) 極座標での加速度

極座標における r 、 θ 方向の加速度がそれぞれ $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ 、および $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ となることを示せ。

(c) 惑星の運動方程式

質量 M の恒星の周りを質量 m の惑星が公転している（但し m は M に比べて十分小さい）。また万有引力定数を G とする。二次元の極座標 r 、 θ を用いて、 r 方向の力 F_r と θ 方向の力 F_θ をこれらの変数を用いて表し、この惑星の二つの運動方程式 (r 方向の式と θ 方向の式) を導け。

(d) 軌道

上記の運動方程式を解くと、軌道を表わす式として例えば

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta}$$

の形の式が得られる。この式の表す曲線の種類は離心率 e の大きさによって異なる。離心率 e がどのような範囲をとる時、この式がどのような軌道を表わすか説明せよ。

(e) 月

月の起源として、地球の近くをたまたま通りかかった天体が地球の引力にとらえられて衛星になったという説（捕獲説又は他人説）が昔からある。この説にはどのような力学的な難点があるか。

5. 波動

一次元の波動方程式とその一般解を書け。また波動方程式の解の一つとして、右方向 (x 軸の正の方向) に伝搬する振幅 A 、波数 k および角速度 ω で表される正弦波の式を書け。

再試験は明後日 8/7 (金曜) の午後 2:45-4:15 に理学部 8 号館 309 号室で行います。合格点に達しないと自覚する受験者は先に採点するので試験終了後に heki@mail.sci.hokudai.ac.jp に連絡してください。不合格者の学生番号は明日 8/6 の夕方までに掲示します。なお例年合格点は、百点満点で三十点から三十五点程度です。