

物理学（力学） 学期末試験

2010/8/04 10:30 - 12:00 担当：日置幸介（理学研究院・自然史科学部門・地球惑星ダイナミクス分野）

1. 運動

大型車と小型車が正面衝突したときに、多くの場合小型車のダメージの方が大きい。その理由を運動量、力積、作用反作用の法則の語を用いて説明せよ。

2. 振動

下の図のようにばね（ばね定数 c ）でつながれた質量 m の物体の運動について以下の設問に答えよ。

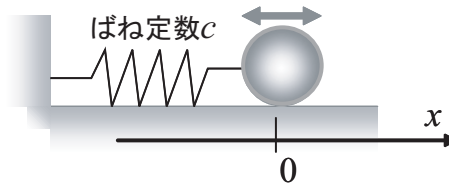


図 1. ばねにつながれた質点。

(a) 物体の重心の座標が x のとき、物体に働く x 軸方向の力を符号も含めて求めよ。

(b) この物体が持つポテンシャルエネルギー U を x の関数として表せ。

(c) 単振動

空気抵抗や摩擦等を無視すると、この物体は単振動を行う。その時の角速度 ω_0 を m と c を用いて表せ。

(d) 強制振動

この物体には速度に比例する抵抗 $-2mk\dot{x}$ が働くとする (k は抵抗の大きさを表す定数)。また x 軸方向に角速度 ω で周期的に変動する外力 $F \cos \omega t$ が働く。その時 x 軸方向の運動方程式は

$$m\ddot{x} = -cx - 2mk\dot{x} + F \cos \omega t$$

となる。 t は時刻を表す変数である。ここで、抵抗や外力がない場合の単振動の角速度 ω_0 を用いて変形すると運動方程式は

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cos \omega t$$

と書けることを示せ。

(e) 三角関数を用いた解法

得られた運動方程式の特殊解の一つを求めてみよう。

十分な時間を経た後の解 x は外力と同じ角速度 ω を持ち、位相が θ だけ遅れていると考える。運動方程式に $x = x_0 \cos(\omega t - \theta)$ を代入、 \sin と \cos の中を展開し、 $\sin \omega t$ と $\cos \omega t$ の項がそれぞれ両辺で等しいとすると、

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_0 \cos \theta + 2k\omega x_0 \sin \theta = \frac{F}{m}$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_0 \sin \theta - 2k\omega x_0 \cos \theta = 0$$

が成り立つことを示せ。

- (f) 上で求めた連立方程式を、 $x_0 \sin \theta$ と、 $x_0 \cos \theta$ を未知数として解き、それらから強制振動の振幅 x_0 を求めよ。
- (g) x_0 と外力の角速度 ω の関係を簡単に図示せよ。ある ω で x_0 が極大を見せることを何と呼ぶか。

3. ベクトル

(a) ベクトルの外積

三次元ベクトルどうしの外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の三成分を示せ。ただし \mathbf{a} と \mathbf{b} の三成分はそれぞれ (a_x, a_y, a_z) と (b_x, b_y, b_z) とする。

(b) ベクトルの外積の微分

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ について、下記の微分法則が成り立つことを両辺の三成分が一致することによって示せ。

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{b}}$$

4. 力学的エネルギー

(a) ポテンシャルエネルギー

質量 M の天体から距離 r の点に質量 m の物体があるとき、物体の持つポテンシャルエネルギー U を求めよ（万有引力定数を G とする）。ただし天体から無限遠におけるポテンシャルエネルギーを基準（ゼロ）とする。

(b) 第二宇宙速度

力学的エネルギー（ポテンシャルエネルギーと運動エネルギー）の総量がゼロという条件から、上記の天体（半径を R とする）表面から飛び立った飛翔体が天体の引力圏を脱する（無限遠に達する）ことができる速度 v を求めよ。

5. 波動

$x = 0$ にある固定端に向かって左向きに進行する正弦波 $y = A \cos(kx + \omega t)$ を考える（ $x \geq 0$ ）。

(a) 波動方程式

上記の式が、波動方程式（伝搬速度 c ）

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

を満たしていることを示せ。また伝搬速度 c を波数 k と角速度 ω を用いて表せ。

(b) 反射波

固定端で反射してきた波 y' が $y' = -A \cos(-kx + \omega t)$ となる理由を述べよ。

(c) 波の重ね合わせ

y と y' の波が重ね合わさって生じる波が定常波となることを、三角関数の和を積に変換する公式を用いて示せ。

再試験は一週間後 8/11（水曜）の午前 10:30-12:00 に理学部 8 号館 309 号室で行います。不合格者の学生番号は 8/6（金曜）の夕方までに掲示します。なお合格点は、100 点満点で 40 点程度（部分点大いにあり、配点は試験が 80 点、過去二回のレポートがそれぞれ 10 点）を予定しています。