

物理学 I (力学) 学期末試験

担当：日置幸介 (理・地球物理)

1. 振動

図 1 のようなばね (ばね定数 k) で繋がれた質量 m の物体の運動を考える。 x 座標は図のようにとる。設問に答えよ。

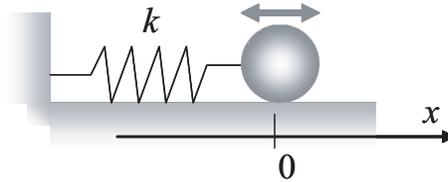


図 1. ばねにつながれた質点の運動。

(a) 力

物体の重心の座標が x のとき、物体に働く x 軸方向の力を符号も含めて求めよ。

(b) ポテンシャルエネルギー

ばねがもたらすこの物体のポテンシャルエネルギーを x と k を用いて表せ。

(c) 運動方程式

この物体の x 軸方向の運動方程式はどのようなになるか。

(d) 運動方程式の一般解

この運動方程式の一般解を求めよ。三角関数を用いても指数関数を用いても良い。

(e) 初期条件を与えた場合の特殊解

時刻ゼロにおける物体の位置と速度をそれぞれ x_0 と v_0 としたときのこの運動方程式の特殊解を求めよ。

(f) 力学的エネルギー

上で求めた特殊解を用いて、この物体の力学的エネルギー (ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの和) が一定になることを示せ。

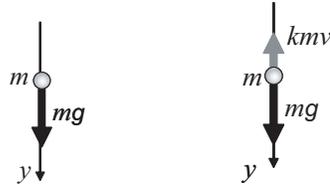
2. ベクトル解析

二つのベクトル、 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ と $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ の内積 (スカラー積) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ と外積 (ベクトル積) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を、それぞれのベクトルの成分を用いて表せ。

3. 重力場中での落下運動

(a) 自由落下

重力場 (重力加速度を g とする) 中で自由落下する物体の時刻 t における速度 v と位置 y を求めよ。座標は鉛直方向に y 軸を取って考えよ (下向きを正とする、下図の左参照)。なお時刻ゼロにおいて速度は v_0 、位置は y_0 とする。



(b) 空気抵抗がある場合の落下運動

物体の質量を m 、進行方向と逆向きに速度に比例する空気抵抗 kmv がかかる（上図の右）と考えてこの物体の運動方程式を書け（なお加速度は \ddot{y} とせず、 \dot{v} とすると次の問題が解き易い）。

(c) 微分方程式を解く

変数分離法を用いて上で求めた微分方程式を解き、速度 v を時間 t の関数として表せ。なお初速はゼロとする。

4. ケプラー運動

(a) 極座標での速度

二次元の直交座標 (x, y) と、極座標 (r, θ) を比較する。直交座標での速度 (v_x, v_y) は、 (\dot{x}, \dot{y}) で表されるが、極座標での速度 (v_r, v_θ) は \dot{r} や $\dot{\theta}$ 等を用いてどのように表せるか。

(b) 極座標での加速度

極座標における r 、 θ 方向の加速度がそれぞれ $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ 、および $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ となることを示せ。

(c) 惑星の運動方程式

質量 M の恒星の周りを質量 m の惑星が公転している（但し m は M に比べて十分小さい）。また万有引力定数を G とする。二次元の極座標 r 、 θ を用いて、 r 方向の力 F_r と θ 方向の力 F_θ をこれらの変数を用いて表し、この惑星の二つの運動方程式（ r 方向の式と θ 方向の式）を導け。

(d) 角運動量保存則

この惑星の θ 方向の運動方程式から、惑星の太陽のまわりの角運動量が一定となることを示せ。

(e) 面積速度一定の法則

角運動量が一定であることは、ケプラーの第二法則（面積速度一定の法則）と同じ意味を持つことを説明せよ。

5. 波動

式 $\psi(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$ で表される x 軸方向の正弦波の波動（振幅 A 、波数 k 、角速度 ω ）について、その進む向き、速度 v 、波長 λ 、周期 T をそれぞれ求めよ。