物理学 I（力学）　学期末試験

担当：日置幸介（理・自然史科学）

1. 単純な運動

（a）自由落下：等加速直線運動

重力場（重力加速度を g とする）中で自由落下する物体の時刻 t における速度 v と位置 y を求めよ。座標は鉛直方向に y 軸を取り、上向きを正とする。なお時刻ゼロにおいて速度は v_0、位置は y_0 とする。

（b）ロケットの加速：運動量保存則

ロケット（質量 M）が質量 m のガスを後ろ向きに、ロケットに対して速度 v_e で噴出することにより加速した。運動量保存則を用いて、ロケットがガス噴出によってどれだけ加速したかを M、m、v_e を用いて表せ。

（c）つながれた質点の運動：運動方程式

軽い定滑車に糸をかけて両端に質量 m_1 と m_2 の質点をつるして手を放す。二つの質点の加速度 a_1、a_2 と糸の張力 T を質点の質量と重力の加速度 g を用いて表せ。ただし $m_1 > m_2$ とする。なお座標軸等は各自適当に定義せよ。

（d）慣性系に対して加速度を持つ座標系

前の問題の実験を加速度 b で下降し始めたエレベーターの中で行ったとすると答えはどう変わるか。

2. オイラーの定理

オイラーの定理、$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて、指数定理 $e^{x+y} = e^x e^y$ から三角関数の正弦と余弦の加法定理が導かれることを示せ（ヒント：例えば $x = ia$、$y = ib$ と置いて両辺にオイラーの定理を適用する）。

3. ベクトル

（a）ベクトル積

二つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

のベクトル積（外積）$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の三成分を求めよ。

（b）単位ベクトル

三次元直交座標系における単位ベクトル（x、y、z のそれぞれの軸の方向を向いた長さ 1 のベクトル）

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のそれぞれを、それ以外の二つの単位ベクトルのベクトル積として表せ。

4. 回転する座標での慣性力

静止した xyz 座標と、Z 軸を回転軸として角速度 ω で図のように回転する XYZ 座標を考える。

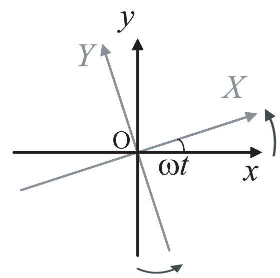

図 1. 慣性系 (O, x, y, z) に対して座標系 (O, X, Y, Z) は角速度 ω で回転運動している。図は z 軸 (Z 軸）の方向から見たもの。

（a）座標変換

ある点の xyz 座標における座標値 x, y と、回転する XYZ 座標における座標値 X, Y を関係づける式を書け。

（b）微分

上で求めた式を時間で二階微分し、$\ddot{x}, \ddot{y}$ と $\ddot{X}, \ddot{Y}$ の関係を求めよ。

（c）運動方程式

質量 m の物体に関する、X および Y 方向の運動方程式が

$$m\ddot{X} = F_X + 2m\omega\dot{Y} + m\omega^2 X \qquad m\ddot{Y} = F_Y - 2m\omega\dot{X} + m\omega^2 Y$$

となることを示せ。

（d）見かけの力の名前

上記の運動方程式の右辺第二項と第三項は、非慣性系における見かけの力であるが、それぞれ何と呼ばれるか。

5. ケプラー運動

（a）第一宇宙速度

質量 M で半径 R の天体の表面から速度 v で物体を水平に投げたとき、その物体がこの天体の地表すれすれを周回する衛星になるときの速度を第一宇宙速度と呼ぶ。この天体の第一宇宙速度を万有引力定数 G や、M、R 等を用いて表せ。

（b）第二宇宙速度

質量 M で半径 R の天体の表面から速度 v でロケットを打ち上げたとき、そのロケットが宇宙のかなた（天体から距離が無限大のところ）までゆける時の打ち上げ速度を第二宇宙速度と呼ぶ。第二宇宙速度は第一宇宙速度の何倍になるか。

（c）ケプラーの第三法則

ある恒星の周りをいくつもの惑星が円軌道を描いて公転しているとき、それぞれの惑星の間でケプラーの第三法則（公転周期 T の二乗が軌道半径 r の三乗に比例する）が成り立つことを示せ。

（d）力学的エネルギー総量

恒星の周りの天体の軌道を極座標 (r, θ) で表すと、一般的に恒星を焦点とする円錐曲線

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}$$

となる。ここで離心率 e と、この天体の力学的エネルギーの関係を述べよ。また力学的エネルギーの符号と、この天体が描く円錐曲線の種類について述べよ。

6. 波動

式 $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ で表される x 軸上を進む正弦波の波動（振幅 A、波数 k、角速度 ω）を考える。t は時間を表す。

(a) 波動方程式

この正弦波の式が、速度 v で伝播する波動を示す波動方程式

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

を満たしていることを示せ。

(b) 波の伝播速度等

この正弦波の進行方向は左右どちら向きか。またこの正弦波の伝播速度 v、波長 λ、周期 T を k や ω を用いて表せ。

（帰省等の予定確定のため迅速な採点を必要とする場合は heki@mail.sci.hokudai.ac.jp に連絡してください）