

# 地球惑星状態物理学 1

学年 \_\_\_\_\_ 番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

## 1. 地球-月系の力学進化

地球の歴史を通じてその自転速度は徐々に遅くなってきている。一方月は徐々に地球から遠ざかりつつあることが知られている。これに関して以下の問いに答えよ。

### (a) 潮汐摩擦

このような地球-月系の力学進化の原因を図を交えて簡潔に説明せよ。

### (b) 過去の一ヶ月

現在の月の軌道半径はおよそ 38 万キロ、軌道を公転する周期は一ヶ月である。およそ 40 億年前の月の軌道半径が 2 万キロとすると公転周期はおよそどの程度か。ケプラーの第三法則を用いて、有効数字一桁程度で求めよ。

(c) 過去の扁平率

当時の地球の自転周期がおよそ5時間であったとすると、当時の地球の扁平率は現在の扁平率から類推するとどの程度であったと思われるか。

(d) 過去の潮汐

40億年前の月の潮汐力は現在と比べてどの程度大きいか。またその時の固体地球、海洋や重力の潮汐はどのような様子であったか。

## 2. 重力

地球全体の半分の半径をもつ核が地球の中心にあるとする。中心核は金属から成り、その密度はマンツルの密度のおよそ倍であるとする。その場合、地表での重力と核-マンツル境界における重力はそれほど変わらないことを数式で示せ。

### 3. 潮汐

月や太陽の引力によって地球に生じる潮汐に、半日周期の成分と一日周期の成分がある理由を図、または数式、あるいはその両者を用いて説明せよ。

### 4. 地球の磁場と重力場

地球の磁場と重力場を (1) 向きや強さの地球上の分布、(2) 時間変化、(3) 他天体での存在などの項目にわけて比較せよ。

## 1. 地球-月系の力学進化

### (a) 潮汐摩擦

#### 解答例

海洋潮汐が、月による起潮力のピークより時間が遅れて生じるため、海面の盛り上がった部分に働く潮汐力がトルクを生じ、地球の回転にブレーキをかける。一方その反作用で月は加速されて、ゆるやかな螺旋を描きながら遠ざかる。地球回転速度の減速と月の軌道半径の増加は角運動量の保存としても理解される。

### (b) 過去の一ヶ月

#### 解答例

ケプラーの第三法則によると軌道半径  $r$  と公転角速度  $n$  の間には  $r^3 n^2 = GM$  の関係がある。ここで  $G$  は万有引力定数、 $M$  は中心天体の質量である。いま軌道半径が  $1/19$  であるから、公転角速度は  $\sqrt{19^3}$  倍、すなわち約 80 倍になる。一ヶ月の長さは現在の約 30 日の 80 分の 1 でおよそ 0.4 日、すなわち 9 時間程度である。

### (c) 過去の扁平率

#### 解答例

遠心力ポテンシャルによる扁平率はおおむね自転角速度の自乗に比例すると考えると、現在の扁平率の  $(24/5)^2$  倍、すなわち現在の扁平率を 0.0034(約 1/298) とするとおよそ 0.08(約 1/13) 程度となる。

### (d) 過去の潮汐

#### 解答例

潮汐ポテンシャルや潮汐力は距離の三乗に逆比例する。距離が  $1/19$  倍とすると、潮汐力は  $19^3$  倍、すなわち現在のおよそ七千倍となる。地球の硬さが現在程度とし、現在の固体地球の潮汐の振幅を 20cm とすると、当時の潮汐の振幅は 1km を超える。また海洋潮汐の振幅も数 km のオーダーとなり、高い山も満潮時には海の底となってしまうことがわかる。重力の潮汐も gal の桁に達する。

## 2. 重力

#### 解答例

地球の質量分布が球対称であるとする、引力は下向きでその地点より深い部分の質量のみが効いてくる。いま核の半径を  $R$ 、質量を  $M$  とすると、核の表面(核-マントル境界)における引力は万有引力定数  $G$  を用いて  $GM/R^2$  と表すことができる。一方地球全体の質量は半径が  $2R$ 、質量は地球全体の体積が核の体積の 8 倍(すなわちマントル部分は 7 倍)でマントルの密度が核の半分であることを考慮すると  $(7/2)M + M = 4.5M$  となる。従って地表での重力は  $4.5GM/(2R)^2 \approx 1.1GM/R^2$  となり、核-マントル境界における重力と一割程度しか変わらないことが示される。

### 3. 潮汐

解答例

月の方向と  $\theta$  の角度にある地表の点における月の潮汐力ポテンシャル  $U_{tide}$  は二次の球関数を用いて

$$U_{tide} = \frac{GM_{moon}r^2}{R^3} P_{20}(\cos \theta)$$

のように近似される。ただし、 $R$  と  $r$  はそれぞれ地球-月間の距離および地球の半径である ( $R \gg r$ )。式に含まれる天頂角  $\theta$  は、観測点の緯度  $\phi$ 、経度  $\lambda$ 、月の時角  $H$ 、赤緯  $\delta$  と

$$\cos \theta = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H$$

の関係にある。赤緯は月が地球の赤道面と成す角度、時角 (hour angle) は観測点を含む子午面と月を含む子午面の成す角度であり、一日の間に  $2\pi$  変化する。これを  $P_{20}(\cos \theta)$  に代入すると

$$U_{tide} = \frac{GM_{moon}r^2}{R^3} \left( \frac{1}{2}(3 \sin^2 \phi - 1) \cdot \frac{1}{2}(3 \sin^2 \delta - 1) + \frac{3}{4} \sin 2\phi \sin 2\delta \cos H + \frac{3}{4} \cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos 2H \right)$$

と書ける。括弧内の第一項は  $H$  を含まない長周期潮である。 $\cos H$  を含む第二項と  $\cos 2H$  を含む第三項がそれぞれ日周潮と半日周期潮をあらわす。日周潮は、月の赤緯  $\delta$  がゼロでない (月が地球の赤道面からずれている) ことによって生じる項である。

### 4. 地球の磁場と重力場

解答例

(1) 磁場ではポテンシャル場を球関数展開したときの主要項が 1 次の項 (双極子磁場) となるため、南 (北) 極で鉛直上 (下) 向き、赤道で水平北向き、南 (北) 半球中緯度では北向きかつ上 (下) 向きの方向になる。一方重力では主要項がゼロ次の項であり、地球中心に集中した質量による重力場と等価な球対称な場 (鉛直下向きの一様な重力場) が主成分となる。

(2) 重力は時間変化する成分は潮汐によるわずかな変化と地震や火山噴火による小さな変動に限られ、時間的にほぼ一定である。一方地球磁場は流体である外核に起源を持つため比較的大きな永年変化をしめす。たとえば双極子モーメントは一世紀あたり 5% という大きな減少を示している。

(3) 重力場はすべての天体が持つが、磁場は金属でできた中心核でダイナモ作用が働いている天体のみ存在する。ダイナモ作用が働くためには、中心核の融解、自転の存在、核内での熱対流の存在などの条件が必要である。