# 物理学 1 講義ノート その１

日置 幸介

1. なぜ力学から始めるのか
   物理学 I で学習する力学には我々の直観で理解できる範囲を大きく超えるものは出てこない。惑星の軌道が楕円になるという事実は直観ではわかりにくいが、これは数少ない例外である。いわば「あたりまえ」の事実を数学的、抽象的に理解するための基本的な訓練、これが物理学 I で力学を学ぶ目的である。ちなみに後に学習することになる電磁気学には、力学とは対照的に、我々の直観的な理解を超える物理法則が多く含まれる。力学で数学的な手法による抽象的な考え方を身に着けておかないと、電磁気学の理解に支障をきたしてしまう。大学に入って最初に学ぶ物理学が力学である理由はそこにある。
2. 力学と微分積分
   微分積分は本来力学を記述するために発展してきた。しかし高校の物理では中学の数学をベースとするという制約があるため、微分積分を用いて力学を記述することが許されない。大学の物理学では高校の数学を基礎とできるため、初めて微積分を用いた力学本来の説明が可能となる。
   質点の位置が $x$ だけで表される一次元の場合を考える。位置 $x$ を時間 $t$ で微分すると速度 $v$ が、速度を時間で微分すると加速度 $a$ が得られる。

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

   なお力学では時間微分を変数の上にドットをつけることで、時間で二階微分したものを二つのドットをつけて表すことが多い。すなわち

$$v = \dot{x} \qquad a = \dot{v} = \ddot{x}$$

   加速度を逆に積分すると速度が、速度を積分すると位置が得られる。

$$x = \int v dt + C \qquad v = \int a dt + C$$

   一般に積分したものを微分するともとに戻る。

$$f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(s) ds$$

   微分積分はこれから多く登場する。例えば保存力場ではポテンシャルを空間で微分すると力が得られる。仕事を積分するとエネルギーの変化が計算される。力学を学ぶこと、すなわち微積分の応用を学ぶことである。

3. ニュートンの運動の法則
   物理学は法則探しの旅である。惑星の運動、放物運動、振り子の振動など、世の中の多くの力学現象は、ある簡単な法則によって支配されている。力学では最初に下記の Newton の運動の三法則を微積分をベースに理解することからはじめる。

   ・**第一法則**　力を受けない質点は静止したまま、又は等速直線運動を行う（**慣性の法則**）

   ・**第二法則**　質量 $m$ の質点に力が作用すると、力の方向に加速度を生じる。その大きさは力に比例し $m$ に反比例する（**運動方程式**、equation of motion）

・**第三法則**　質点 A が質点 B に力（**作用**、action）を及ぼすとき、質点 A は質点 B から同じ大きさで向きが反対の力（**反作用**、reaction）を受ける

力を $f$、加速度を $a$ として第一と第二法則を式で表すと

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$$

で表されるニュートンの運動方程式になる。力と加速度はそれぞれベクトルであり、質量はスカラーである。力の単位は N(ニュートン)、質量と加速度の単位はそれぞれ kg と m/s$^2$ が標準的に使われる（MKS 系）。直交座標を用いて成分で表すと

$$f_x = ma_x \qquad f_y = ma_y \qquad f_z = ma_z$$

文字の添え字はそれぞれ成分を示す。加速度は位置を時間で二階微分したものだから、

$$f_x = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad f_y = m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad f_z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

と書ける。

4. 運動方程式を解く

運動方程式を解いて運動を求める（時間の関数としての位置を求める）ことは微分方程式を解くことに他ならない。加速度 $\boldsymbol{a}$ を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を時間で二階微分したものとして運動方程式を書き直すと ($\boldsymbol{r} = (x, y, z)$)

$$\boldsymbol{f} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \quad (= m\ddot{\boldsymbol{r}})$$

となる。次に運動が１次元（$x$ 座標のみ）の場合に簡単な事例で運動方程式を解いてみよう。

(a) 力がゼロの場合

$f$ がゼロであるから運動方程式は

$$f = 0 \quad \text{すなわち} \quad m\ddot{x} = 0 \quad \text{すなわち} \quad m\dot{v} = 0$$

となる。導関数がゼロであるから速度 $v$ は定数である。これを $v_0$ とすると

$$v = v_0 \qquad x = v_0t + \text{定数} = v_0t + x_0$$

が求める速度と位置になる。速度が一定であるから、これは**等速直線運動**である。ここで $x_0$ は $t = 0$ における位置である（初期条件)。天体から遠く離れた宇宙空間を飛翔する物体の運動がこれに近い。

(b) 力が一定の場合

運動方程式で、力が一定なら加速度が一定となる。

$$\dot{v} = a \quad \text{すなわち} \quad v = at + v_0$$

ここで $v_0$ は時刻ゼロにおける速度である。位置 $x$ は、微分すると上の式の $v$ になるような関数で表される。すなわち

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

である。$x_0$ は時刻ゼロにおける位置である。この運動は加速度が一定なので**等加速度運動**である。一様な重力場の中での質点の運動は等加速度運動である。地表で $x$ を鉛直下方にとって力を重力と考えると、この運動は落下運動に他ならない。

5. 慣性系

慣性の法則が成り立つ座標系を**慣性系** (inertial system) と呼ぶ。この系で運動を記述すると力学の法則が簡単になる。例えば惑星や人工衛星の運動を記述する際には、太陽系の重心に固定した座標系が慣性系としてしばしば用いられる。この太陽系重心座標に対して等速直線運動をしている系を使っても慣性の法則は成り立つ。地球表面に固定した座標系は、地球の公転運動（座標系が太陽の周りに円運動を行う）や自転運動（座標系が慣性系に対して回転運動している）のせいで慣性系ではない。したがって地球表面に固定した座標系で質点の運動を論じる際には遠心力やコリオリ力（転向力）などの見かけの力を導入する必要があり、力学法則が複雑になる（これらの見かけの力に関しては後日学習する)。ただし運動の舞台となる空間が比較的小さく、質点の運動の速度が比較的遅い場合はこれらの見かけの力の影響が無視できるほど小さいことが多い。

6. 運動量と力積

質量 $m$ の質点が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動するとき、その積 $\boldsymbol{p}$ を**運動量** (momentum) と呼ぶ。すなわち

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

なお $\boldsymbol{p}$ はベクトル量である。運動方程式は運動量を使うと

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{f}$$

つまり、力が働くと運動量が変化する。その割合は力の大きさに等しい。逆に力が働かない場合、または働く力の合力がゼロである場合、運動量は保存される（「運動量保存の法則」)。この概念は質点の数が複数の場合（質点系）重要になる。上の式を積分すると、

$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{f}\,dt = \bar{\boldsymbol{f}}\Delta t$$

$\bar{\boldsymbol{f}}$ は平均の力、$\Delta t$ は平均の力が等価的に働く時間である。$\bar{\boldsymbol{f}}\Delta t$ を**力積** (impulse) と呼ぶ。運動量の変化は力積に等しい。例えば質量 $m$ の球が壁に直角に速度 $V$ で飛んできて $V'$ の速さで跳ね返ったとする。球が壁から受けた力積は、$V$ と $V'$ はそれぞれ反対向きであるから、

$$mV' - (-mV) = m(V + V')$$

が運動量の変化（壁から外向き）となり、同じ大きさと向きの力積が球に働いたと考えられる。

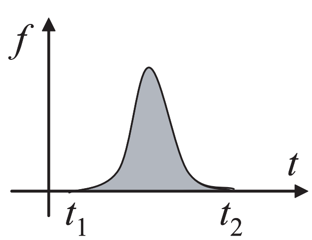


図 1. 時間の関数としての力。力積は灰色部分の面積に相当。