物理学 1 講義ノート その 2

日置 幸介

1. 重力場の中の質点の運動
   ニュートンの運動方程式

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$$

を様々な条件で解いてみる。

(a) 自由落下運動

力が鉛直下方に一定（重力）の場合の運動である。鉛直方向の座標軸を y 軸にとり、上向きを正とする。重力加速度 g は下向きであるから、質量 m をもつ質点の y 軸方向の運動方程式は次のようになる

$$m\dot{v} = -gm \qquad \text{すなわち} \qquad v = -gt + v_0$$

ここで v_0 は時刻ゼロにおける速度である。位置 y は、微分すると上の式の v になるような関数だから、単純に積分して

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

となる。積分定数 y_0 は時刻ゼロにおける位置である。

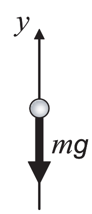

図 1. 自由落下運動。初速は v_0、初期位置を y_0 とする。

ちょっとアドバンス: 空気抵抗がある場合の自由落下

空気抵抗は速度に比例すると仮定して抵抗力を kmv とする。y 軸は鉛直下方にとると、運動方程式は

$$m\dot{v} = mg - kmv$$

となる。

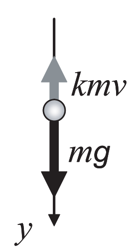

図 2. 速度に比例する空気抵抗のある場合の自由落下運動。抵抗力は kmv とする。

これは次のように変数分離できる。

$$\frac{dv}{dt} = g - kv \qquad \text{変形して} \qquad \frac{dv}{v - \frac{g}{k}} = -kdt$$

積分すると

$$\log\left|v - \frac{g}{k}\right| = -kt + \text{定数} \qquad v = \frac{g}{k} \pm Ce^{-kt}$$

$t = 0$ での速度を v_0 として積分定数 C を決める。$C = v_0 - g/k$ となるので

$$v = \frac{g}{k} + \left(v_0 - \frac{g}{k}\right)e^{-kt}$$

ちなみに初速がゼロであれば

$$v = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

いずれにせよ時間無限大で $v_\infty = g/k$ の**終速度** (terminal velocity) に近づく。v をさらに時間で積分すると位置 y も簡単に得られる。スカイダイビングで空中に飛び出したダイバーの落下速度は、程なく終速度に達するため、その後ダイバーは等速直線運動をすることになり通常と同じ重力を感じるはずである。手を広げたりして空気抵抗を微調整すると（k を微調整することになる）終速度も変化し、一緒に飛び降りた仲間との上下位置を変えることができる。

（b）放物運動

斜めに物体を投げ上げたときの運動が**放物運動**である。物体を投げる方向が、水平から角度 λ_0 だけ上向きだとする。x 軸を水平に、y 軸を鉛直上方にとる。働く力は鉛直下方の重力だけであるから、x 軸方向と y 軸方向の運動方程式は次のようになる。x 方向と y 方向の速度をそれぞれ u と v とすると、

$$m\dot{u} = 0 \qquad m\dot{v} = -mg$$

x 方向の運動方程式は既に学習した等速直線運動と同じ、y 方向は等加速直線運動の場合のそれと同じである。したがって運動方程式を積分した解は、初速を V_0、投げ上げる仰角を λ_0 とし、時刻ゼロでの位置を $x = 0$、$y = 0$ として

$$u = V_0 \cos\lambda_0 \qquad v = V_0 \sin\lambda_0 - gt$$

となる。これをさらに時間で積分して任意の時刻における位置 x、y を求めると

$$x = V_0 t \cos\lambda_0 \qquad y = V_0 t \sin\lambda_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

となる。軌跡の方程式は上の 2 式から時刻 t を消去すると得られ、

$$y = x\tan\lambda_0 - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0^2\cos^2\lambda_0}$$

y は x の二次関数になる。$y = 0$、すなわち高さゼロとして得られる x の二つの解は、ひとつは投げ上げる場所（$x = 0$)、もうひとつは物体が着地する点の座標を与え、その値はすなわち物体の飛距離 R に他ならない。

$$R = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\lambda_0$$

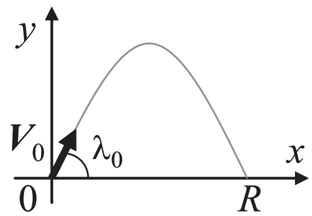

図 3. 放物運動。初速は $\boldsymbol{V}_0$、投げ上げる仰角が λ_0。

飛距離 R は投げ上げる仰角 λ_0 が 45 度のとき $\sin 2\lambda_0 = 1$ となって最大になる。また R は V_0 の自乗に比例する。従って倍の速度で投げると飛距離は四倍になる。実際の地上で物を投げる場合は空気の抵抗があるため、仰角を 45 度より幾分小さい角度にしたときに最大になる。

2. 単振動

ばねで繋がれた物体の運動や振り子の運動など、変位（もとの位置からのずれ）に比例してもとに戻る力が働く場合に見られる運動が**単振動**である。

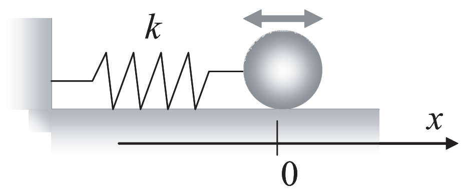

図 4. ばねにつながれた質点の単振動。

変位を x(もとの位置は $x = 0$)、ばね定数を k とすると、力 f は

$$f = -kx$$

と表される。したがって運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx$$

である。両辺を m で割り、さらに

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

とすると式は

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

となる。この微分方程式の解 x は時間で二度微分すると符号が変化してもとの関数の定数倍に戻る関数であることがわかる。

(a) 特殊解：三角関数

$\sin t$ や $\cos t$ のような三角関数を二回微分すると元の関数の符号を変えたものになる。すなわち

$$\frac{d^2}{dt^2}\sin t = -\sin t \qquad \frac{d^2}{dt^2}\cos t = -\cos t$$

t を ωt に置き換えてみると

$$\frac{d^2}{dt^2}\sin \omega t = -\omega^2 \sin \omega t \qquad \frac{d^2}{dt^2}\cos \omega t = -\omega^2 \cos \omega t$$

従って $x = \sin \omega t$ や $x = \cos \omega t$ は単振動の微分方程式の解のひとつ（**特殊解**）であることがわかる。ここで ω は角速度であり、周期は $2\pi/\omega$ になる。上記のばねの場合は周期は $2\pi\sqrt{m/k}$ になる。

(b) 一般解

単振動の微分方程式は線形性を持つ、すなわち無数にある解のいくつかを取り出して作った線形結合（係数をかけて足したもの）も解である。つまり上で求めた二つの解の線形結合

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

も解である。この解は**一般解**であり、任意の初期条件を満たすことができる。例えば時刻ゼロで位置を x_0、速度を v_0 とすると

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin \omega t$$

がその条件を満たす解となる。

(c) 指数関数を用いた解

虚数単位 i と指数関数を導入して単振動の微分方程式を解いてみる。**オイラーの定理**によると $e^{it} = \cos t + i \sin t$ である。また一般の指数関数の微分の法則である $de^{ct}/dt = ce^{ct}$ から

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{it} = i^2 e^{it} = -e^{it}$$

となり、これも三角関数 sin や cos のように二度微分すると符号が変わって元に戻る性質を持っている。単振動の微分方程式の一般解は二つの特殊解 $e^{i\omega t}$ と $e^{-i\omega t}$ の線形結合で表される。すなわち

$$x = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

初期条件が与えられた場合はそれに合うように二つの積分定数を決めればよい。複素数の導入は計算を簡便化するためであり、複素数として得られた x の解で物理学的に意味のあるのは実数部分のみである。

(d) オイラーの定理

上記のオイラーの定理は形が単純なので記憶は容易だが、なぜそうなるのか直感的には理解しがたいものがある。これを理解するためには、参考書として挙げた「キーポイント力学」の 32-34p あるいは「ファインマン物理学 I　力学」の第 22 章に優れた解説がある。「キーポイント力学」では同じ初期条件の単振動の問題を三角関数と指数関数で解いて、その解を比較して逆にオイラーの定理を導いている。ここでは一番簡単な理解の仕方としてテイラー展開によるものを紹介する。ゼロの周りのテイラー展開はマクローリン展開とも称されるが、要するに関数 $f(x)$ を

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k + \cdots$$

というように展開するものである。これで cos と sin を展開してみると

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

となる。一方指数関数を展開すると

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

となる。x を $\pm ix$ に置き換えると

$$e^{\pm ix} = 1 \pm \frac{1}{1!}ix - \frac{1}{2!}x^2 \mp \frac{1}{3!}ix^3 + \frac{1}{4!}x^4 \pm \frac{1}{5!}ix^5 + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right) \pm i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots\right)$$

これを、既に与えた cos と sin のマクローリン展開形と比べると

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

であることが理解できる。

次回の減衰振動、強制振動などの運動方程式の解法では指数関数を用いた解法が主になるので、ここで慣れておくことが望ましい。