物理学 1 講義ノート その 3

日置 幸介

1. 単振動以外の振動現象
   前回学んだ単振動 (harmonic oscillation) は、そのシステムに固有の周期を持ち、何らかの原因で励起されたあとは永久に継続する**自由振動** (free oscillation) である。実際に観察される振動現象では、空気抵抗などの抵抗力が働くため、徐々に振幅が小さく減衰してゆく**減衰振動** (damped oscillation) になることが多い。また固有の周期を持つシステムでも、それと異なる周期で外部から強制的に振動させられる**強制振動** (forced oscillation) などの現象も多く見られる。
2. 減衰振動
   単振動の運動方程式に、速度に比例し、速度の向きと反対方向に働く抵抗力の項 $2mk\dot{x}$ を追加する。

$$m\ddot{x} = -cx - 2mk\dot{x}$$

   k は抵抗の強さを表す量であるが、係数を $2km$ としたのは後に示す計算結果の外見を整えるためである。また c はばね定数である。抵抗がない場合の振動数 ω は $\sqrt{c/m}$ であるから $c = m\omega^2$ とおいて各項を m で割れば、

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

   となる。
   (a) 指数関数による解法
   このような x や $\dot{x}$ や $\ddot{x}$ の一次の項だけからなる**斉次線形微分方程式**の特殊解は、解を指数関数と考えて $x = Ae^{\lambda t}$ と置くと簡単に求められる。微分方程式が次のような代数方程式に変わってしまうからである。

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0$$

   解の公式で λ を求めれば

$$\lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}$$

   (b) 抵抗が小さい場合：振動解
   ここでは比較的抵抗が小さくて $k < \omega$ の場合を考える。一般解は

$$x = Ae^{-kt+i\sqrt{\omega^2-k^2}t} + Be^{-kt-i\sqrt{\omega^2-k^2}t} = e^{-kt}\left(Ae^{i\sqrt{\omega^2-k^2}t} + Be^{-i\sqrt{\omega^2-k^2}t}\right)$$

   括弧の中は前回もとめた単振動の角速度を ω から $\sqrt{\omega^2 - k^2}$ に変えただけ（つまり抵抗があると角速度がやや小さくなる）で同じである。それに係数 e^{-kt} がかかっているが、抵抗 k の大きさに応じて振動の振幅が時間とともに小さくなってゆくことを示している。
   (c) 抵抗が大きい場合：非振動解
   なお抵抗力が大きく $k > \omega$ となる場合を考える。一般解は

$$x = e^{-kt}\left(Ae^{\sqrt{k^2-\omega^2}t} + Be^{-\sqrt{k^2-\omega^2}t}\right)$$

   となり、もはや振動は行わず、単に変位が指数関数的に減少してゆく解となる。このような現象を**過減衰**という。

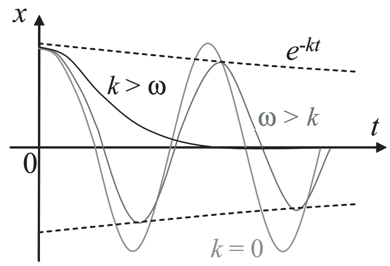

図 1. 減衰振動 ($k < \omega$)、。減衰のない場合 ($k = 0$)、過減衰の場合 ($k > \omega$) も併せて示す。

3. 強制振動と共鳴

減衰振動の運動方程式に、質点に働く振動的な力（外力）の項を加える。このときの振動現象を強制振動と呼ぶ。周期的な力を $F\cos\omega t$ とする。

$$m\ddot{x} = -cx - 2mk\dot{x} + F\cos\omega t$$

$c = m\omega_0^2$ とおいて各項を m で割ると

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}\cos\omega t$$

(a) 三角関数を用いた解法

解 x は外力同じ角速度 ω を持ち位相が θ だけ遅れていると考えて $x = x_0\cos(\omega t - \theta)$ と置くと

$$-x_0\omega^2\cos(\omega t - \theta) - 2kx_0\omega\sin(\omega t - \theta) + \omega_0^2 x_0\cos(\omega t - \theta) = \frac{F}{m}\cos\omega t$$

sin と cos の中を展開すると

$$-x_0\omega^2(\cos\omega t\cos\theta + \sin\omega t\sin\theta) - 2kx_0\omega(\sin\omega t\cos\theta - \cos\omega t\sin\theta)$$
$$+\omega_0^2 x_0(\cos\omega t\cos\theta + \sin\omega t\sin\theta) = \frac{F}{m}\cos\omega t$$

両辺で $\sin\omega t$ と $\cos\omega t$ の係数が等しいとすると

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_0\cos\theta + 2k\omega x_0\sin\theta = \frac{F}{m}$$
$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_0\sin\theta - 2k\omega x_0\cos\theta = 0$$

これらを $x_0\cos\theta$ と $x_0\sin\theta$ の連立方程式として解いて、それらからさらに x_0 と $\tan\theta$ を求めると、

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}}\frac{F}{m} \qquad \tan\theta = \frac{2k\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

となる。

(b) 指数関数を用いた解法

外力を $Fe^{i\omega t}$ とおき（実際の力はその実数部分）、また解は外力と同じ角速度 ω を持ち位相が θ だけ遅れていると考えて $x = x_0 e^{i(\omega t - \theta)}$ と置くと、微分方程式は代数方程式に変換され

$$\left[(i\omega)^2 + 2k(i\omega) + \omega_0^2\right]x_0 e^{i(\omega t - \theta)} = \frac{F}{m}e^{i\omega t}$$

となる。したがって

$$x_0 e^{-i\theta} = \frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2ik\omega)}$$

絶対値 x_0 は右辺と右辺に共役な複素数を掛けたものの平方根で求められる。また位相遅れ θ の tan も下記のようになり、三角関数による解と一致する。

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}} \frac{F}{m} \qquad \tan\theta = \frac{2k\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

(c) 共鳴

強制振動の振幅 x_0 は、外力の角速度 ω が

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2k^2}$$

となる時最大になる。これが**共鳴**である。抵抗の強さ k がゼロの場合は共鳴は外力の周期がシステム固有の周期（自由振動の周期）に一致したときに起こる。

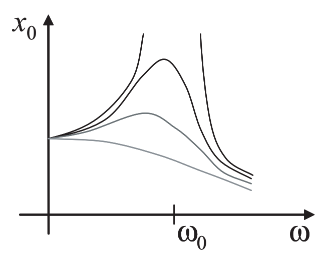

図 2. 強制振動の共鳴曲線。縦軸は振動の振幅、横軸は外力の周期。ω_0 は自由振動の周期で、外力の周期がこれに近づくと共鳴によって振幅が大きくなる。色が濃い曲線ほど抵抗が小さい場合を示す（黒は抵抗ゼロの場合で振幅は無限大に発散）。

ブランコの揺れは固有の周期を持っている。その周期にタイミングを合わせてフランコに乗った人の背中を周期的に押してやると振幅が大きくなってゆく。子供は物理学を知っているわけではないが、感覚的に強制振動の外力の周期をシステムの固有周期にあわせれば共鳴を利用して小さな力で振幅を大きくできることを体で知っているのである。