物理学 1 講義ノート その 4

日置 幸介

1. ベクトル

これから学ぶ角運動量やその保存、エネルギーと仕事、惑星の運動などではベクトルによる表記や演算が多くなる。まずその基礎を固めておきたい。

(a) ベクトルの成分による表記、単位ベクトルによる表記

三次元のベクトル $\boldsymbol{a}$ の x、y、z 成分をそれぞれ a_x、a_y、a_z とすると、ベクトルは成分を括弧で囲んで

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) \qquad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

などと表記する。また単位ベクトル（x、y、z のそれぞれの軸の方向を向いた長さ 1 のベクトル）

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

と表記することもある。

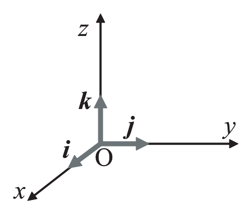

図 1. 三次元の直交座標と単位ベクトル。

(b) 内積と外積

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積**（スカラー積、 scaler product, inner product, dot product）は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

外積 (ベクトル積、vector product, outer product, cross product) は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

であり、両方のベクトルに直交する方向を持ち、$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に右ねじを回したときにねじが進む向きを向いている。またその大きさは二つのベクトルの大きさの積に両者が成す角の sin を掛けたものになっている。これは二つのベクトルを二辺とする平行四辺形の面積に等しい。

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$$

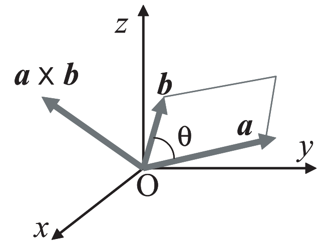

図 2. ベクトルの外積。

同じベクトルどうしの内積は絶対値（ベクトルの長さ）の二乗になる。また同じベクトルどうしの外積はゼロになるが、これは上記の平行四辺形の面積の意味から自明である。

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2 \qquad\qquad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

順番の交換に対して内積と外積は

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$

の関係になっている。

（c）ベクトルの微分

ベクトルの微分は次のように定義される。(x, y, z) という三成分を持つベクトル $\boldsymbol{r}$ を考えると

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

内積や外積の微分にはスカラーどうしの積に対するのと同様な微分則が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \dot{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\dot{\boldsymbol{b}} \qquad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \dot{\boldsymbol{a}}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\dot{\boldsymbol{b}}$$

2. 角運動量の保存

（a）中心力と角運動量

常に原点の方向を向く力を**中心力**と呼び、惑星の公転などの理解に重要な概念である。ある点の位置ベクトル（原点からその点に向かうベクトル）を $\boldsymbol{r}$ とすると、中心力 $\boldsymbol{f}$ は

$$\boldsymbol{f} = F(x, y, z)\,\boldsymbol{r}$$

と表すことができる。ここで F は力の大きさを表すスカラー量（座標値 x, y, z の関数）で、力の向きはいつも原点とその点を結ぶベクトル $\boldsymbol{r}$ の方向にある。

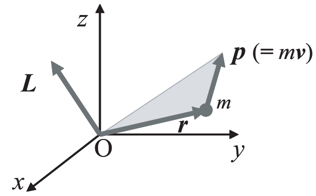

図 3. 運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ と角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$。

質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と運動量ベクトル $\boldsymbol{p}\,(=m\boldsymbol{v})$ のベクトル積を、原点の周りの**角運動量**と呼ぶ。角運動量を $\boldsymbol{L}$ とすると

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=m\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})$$

と表される。

（b）角運動量の保存

中心力が働く場での質点の運動では、質点の角運動量は保存される。これは角運動量を時間で微分した量がゼロになることから示される。

$$\dot{\boldsymbol{L}}=m\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})=m\,(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{v}})$$

ところが、第一項の $\dot{\boldsymbol{r}}$ は $\boldsymbol{v}$ であり、かつ第二項の $\dot{\boldsymbol{v}}$ は加速度であり、力 $F(x,y,z)\,\boldsymbol{r}$ を質量 m で割ったものに等しいから、上の式は

$$m\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}+\frac{F(x,y,z)}{m}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{0}$$

とゼロになることがわかる。なおここでは同じベクトルどうしの外積がゼロになることを使った。

（c）面積速度

力が中心力の場合、運動は同一平面内で起こる。これは角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ と質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の内積

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{L}=m\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})=0$$

がゼロになることからわかる。$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ のベクトル積は $\boldsymbol{r}$ に直交するからである。

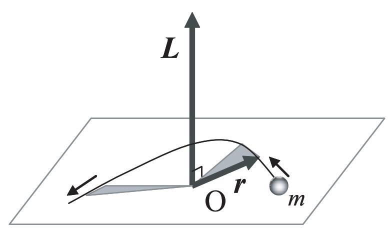

図 4. 原点に向かう中心力による質点 m の運動は角運動量ベクトルに垂直な面内で起こる。また面積速度、すなわち単位時間にベクトル $\boldsymbol{r}$ が覆う面積は等しい（二箇所にある灰色の三角形の面積は等しい)。

すなわち位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は常に角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ と直交する。これはベクトル $\boldsymbol{r}$ の終点が必ず $\boldsymbol{L}$ に垂直に交わる平面内にあることを意味する。地球の太陽の周りの公転を考えるとこの平面は黄道面（地球の公転面）に他ならない。また角運動量ベクトルは $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ に比例するが、外積の大きさは二つのベクトルが作る平行四辺形の面積であることを考えると、これはベクトル $\boldsymbol{r}$ が単位時間内に覆う面積（**面積速度**）の倍になっている。つまり角運動量が保存されるということは面積速度の二倍が一定、つまり面積速度が一定であることを意味する。これはケプラーの第二法則として知られている。

3. 質点系

複数の質点の集まりを**質点系**と呼ぶ。質点系の持つ運動量ベクトルの総和が**全運動量**、角運動量ベクトルの総和が**全角運動量**である。ベクトルと運動の法則を使って全運動量や全角運動量の保存則を導く。

（a）全運動量の保存

質量 m_1 と m_2 を持つ二つの質点から成る質点系を考え、外からの力（外力）が働かないと仮定する。それらの運動方程式は

$$m\dot{\boldsymbol{v}}_1 = \boldsymbol{f}_1 \qquad\qquad m\dot{\boldsymbol{v}}_2 = \boldsymbol{f}_2$$

となる。$\boldsymbol{f}_1$ と $\boldsymbol{f}_2$ は二つの質点が互いに及ぼす力（引力や電気力など）である。これらは作用と反作用であるから、運動の第三法則により。$\boldsymbol{f}_1 = -\boldsymbol{f}_2$ である。二つの運動方程式を足すと

$$m\dot{\boldsymbol{v}}_1 + m\dot{\boldsymbol{v}}_2 = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{0}$$

これを時間で積分すると

$$m\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \text{一定}$$

つまり全運動量は保存される。これは質点の数を何個にしても外力がゼロである限り成立する。同様の議論は角運動量 $\boldsymbol{L}$ に関しても成り立つ。

（b）内力と外力

上記の質点系で、質点どうしが及ぼしあう力は**内力**であるから全運動量は保存される。しかし個々の質点にとってみると、この力は**外力**に他ならない。したがって個々の質点の運動量は保存されず、力積に応じた変化が生じる。この質点に力を及ぼす外部の質点を加えて単一の質点系と考えれば、かつての外力は内力となり、質点系の全運動量は保存される。同様の議論は角運動量でも成り立つ。地球の自転角運動量は月の潮汐摩擦によって日々減少しつつある。これは地球だけからみると外力による角運動量の変化（地球の自転の角運動量が減少する）と捉えられる。しかし、これを地球と月からなる系としてみると、地球が失った角運動量は月の角運動量となる（月の公転の角運動量が増大する）ため、全角運動量は熱エネルギーとして消散する一部を除いて実はほとんど保存されているのである。