# 物理学 1 講義ノート その 5

日置 幸介

1. エネルギー保存とポテンシャル
人類は永久機関の夢を失う代わりにエネルギー保存の法則という知識を手に入れた。エネルギーには熱エネルギーや化学エネルギーなどもあるが、ここでは**運動エネルギー** (kinetic energy) と**位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）** (potential energy) から成る**力学的エネルギー** (mechanical energy) について学ぶ。

2. 落下する質点の運動

(a) 運動中に保存される量
時刻ゼロに高さ $h$ からゆっくり手を離して（時刻ゼロで速度ゼロ）質点を落下させる。鉛直上方に $x$ 軸をとって重力の加速度を $g$ として運動方程式を積分して速度と位置を時間の関数として求めると、

$$\dot{x} = -gt \qquad\qquad x = h - \frac{1}{2}gt^2$$

と書き表せる。最初の式から $t = -(\dot{x}/g)$ として二つ目の式に代入すると

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + gx = gh$$

全体に質点の質量をかけると

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx = mgh$$

左辺の第一項が質点の運動エネルギー、第二項が位置エネルギーであり、両者の和である全エネルギーは右辺の定数 $mgh$ として一定になる。右辺は時刻ゼロでゆっくり手を離した時点での位置エネルギーであるが、そのとき運動エネルギーはゼロなので全エネルギーと考えてよい。最初に $h$ の値を取っていた $x$ が時間とともに減少するにつれて、目減りした位置エネルギーの分が運動エネルギーに変換される。

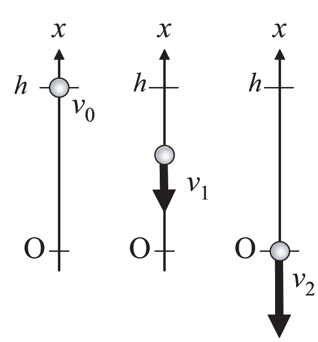


図 1. 質点の落下と力学的エネルギー。質点が最初に持っている位置エネルギーが時間とともに運動エネルギーに変わる。

(b) エネルギーの概念を用いて様々な問題を解く
従来運動方程式を積分して解いて求めていた問題のいくつかはエネルギーの概念を用いるとより簡単に解ける。例えば高さ $h$ からゆっくり手を離して落下させた質点が地面に到着したときの速度

は、地表 ($x = 0$) での位置エネルギーがゼロとすると、当初の位置エネルギーがすべて運動エネルギーに変わったと考えればよいので

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = mgh$$

を $\dot{x}$ に関して解いて

$$\dot{x} = -\sqrt{2gh}$$

とすればよい（速度は下向きなのでマイナスの方の解を採用する）。この解法はわざわざ運動方程式から $x$ と $\dot{x}$ を $t$ の関数として求め、$x = 0$ として得た $t$ を $\dot{x}$ の式に代入して求める従来のアプローチより手間が少ない。

3. ポテンシャルエネルギー：より一般的な導出

一次元の運動方程式

$$m\ddot{x} = F_x$$

を考え、両辺に $\dot{x}$ を掛けて時間 $t$ で積分してみる。

$$m\dot{x}\ddot{x} = F_x\dot{x}$$

左辺は $1/2(m\dot{x}^2)$ を時間で微分したものになっているので、次のように書いてもよい。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = F_x\frac{dx}{dt}$$

ここで力 $F_x$ を、ある原始関数 $U(x)$ を $x$ で微分してマイナスをつけたものと仮定する。

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx}$$

すると先ほどの式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = -\frac{dU(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{dU(x)}{dt}$$

となる。すなわち微小時間 $dt$ の間に運動エネルギー $(1/2)m\dot{x}^2$ が増えた分だけポテンシャルエネルギー $U(x)$ が減るという図式になる。時間 $dt$ の間に質点の $x$ 座標が $x_1$ から $x_2$ に変わり、さらに速度 $\dot{x}$ が $v_1$ から $v_2$ になったと考えると、その間の両辺の変化は

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -[U(x_2) - U(x_1)]$$

となる。移項して

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + U(x_2) = \frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1)$$

ここで出てくる関数 $U(x)$ が位置（ポテンシャル）エネルギーである。落下する質点の場合力は $F_x = -mg$ であるからポテンシャルエネルギーは $U(x) = mgx$ となり（$x = 0$ でゼロと仮定)、以前求めたものに一致する。

4. 単振動におけるエネルギー保存

力が変位に比例し、原点の向きに働く場合の運動が単振動である。この場合も質点の落下と同様ポテンシャルエネルギーが定義でき、全力学的エネルギーの保存が成り立つ。摩擦を考慮した場合生ずる減衰振動では力学的エネルギーの保存は成り立たず、熱エネルギーも含めた総合的な観点においてのみエネルギーが保存する。

(a) ポテンシャルエネルギー

力 $F_x$ は

$$F_x = -kx$$

であるから、ポテンシャルの定義である

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx}$$

から、$x = 0$ で $U(0) = 0$ としたときのポテンシャル $U$ は以下のように求められる。

$$U(x) = -\int_0^x (-kx')dx' = \frac{1}{2}kx^2$$

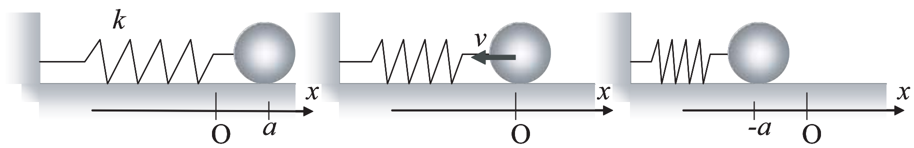


図 2. ばねに繋がれた質点の単振動と力学的エネルギー。質点が最初に持っているポテンシャルエネルギー $(1/2)ka^2$ が時間とともに運動エネルギーに変わる。ばねが縮みきったところで再び運動エネルギーはゼロとなり力学的エネルギーはポテンシャルエネルギーのみとなる。

(b) エネルギーの保存

数ある単振動の解から、$t = 0$ で $x = a, \dot{x} = 0$ という初期値を与えると

$$x = a\cos\omega t \qquad\qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

が得られる。微分して速度を求めると

$$\dot{x} = -a\omega\sin\omega t$$

となる。したがって運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和は

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2\sin^2\omega t + \frac{1}{2}ka^2\cos^2\omega t$$

ここに $m = k/\omega^2$ を代入すると

$$\frac{1}{2}ka^2\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right) = \frac{1}{2}ka^2$$

となり、エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2$$

が成り立つ。右辺は時刻ゼロにおけるポテンシャルエネルギー（運動エネルギーはゼロ）で定数である。

5. 二次元、三次元の場合のポテンシャルエネルギー

二次元の力の場を考えるが、三次元の場合も新たに $z$ 成分を導入するだけで同様の議論が成り立つ。ある点における力の $x$ および $y$ 方向成分が、何らかの関数の $x$ や $y$ に関する**偏微分係数** (partial derivative) の符号を変えたものとして表せる、すなわち

$$F_x(x,y) = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \qquad F_y(x,y) = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$$

のとき、その関数 $U(x,y)$ はその力の**ポテンシャル**を表している。なお偏微分とは、複数の変数を含む関数を、ある変数にのみ注目してその変数に関して微分したもの。力がポテンシャルの偏微分として表せるとき、その力は**保存力** (conservative force) である。

どんな力の場にもポテンシャルが必ずしも存在するわけではない。二次元の場合について、ポテンシャルが存在するための条件を考える。$x$ および $y$ 方向の力をそれぞれ $y$ および $x$ で偏微分してみると

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

それぞれの式の右辺は、同じ関数 $U(x,y)$ を $x$ および $y$ で偏微分するときの順序を入れ替えただけのもので、一般にそれらは等しくなる。したがってポテンシャルが存在するためには

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

が成り立つ必要がある。たとえば $F_x = xy^2$、$F_y = x^2y$ という力の場を考えてみよう。$\partial F_x/\partial y = \partial F_y/\partial x = 2xy$ とこの条件を満たしているのでポテンシャルが存在する。この場合のポテンシャルは $U(x,y) = (1/2)x^2y^2$ となる。三次元の場合、ポテンシャルが存在するためには

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$$

の三つの条件を満たす必要がある。これは単純に

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

と書くこともできる。$\nabla\times$ で表されるベクトル場の回転（rotation）に関しては、後日電磁気学で詳しく学習する。

6. エネルギーと仕事

**仕事** (work) とは、ある力で物体を動かすときに、力と「力の方向に」動いた道のりをかけたものである。エネルギーと仕事は同じ次元を持ち、密接な関係を持っている。物体があるエネルギーを持っているということは、その物体がそれと同じ量の「仕事」をする能力があることを意味する。質量 $m$ の物体が速度 $v$ で動いているとすると、その物体は止まるまでに他の物体に $(1/2)mv^2$ の仕事をすることができるのである。逆にその物体に何らかの仕事をするとその物体の持つエネルギーが変わる。

質点が糸に繋がれていたり滑らかな斜面から束縛を受けていることがあるが、束縛する斜面が静止している限り、運動方向と斜面が質点に及ぼす力は直交しており、斜面が成す仕事はゼロである。したがって滑らかな坂を転がる質点は運動の方向が斜面の形状によって変わろうとも力学的エネルギーの保存は成り立っている。

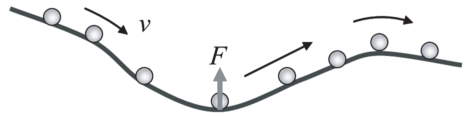


図 3. なめらかな面に束縛された質点の運動。面は力 $F$ を介して速度 $v$ に変化（加速度）を与えるが、力の向きが運動方向に垂直であるため、質点に「仕事」は行わない。その結果質点の力学的エネルギーは保存される。

(a) 保存力場における仕事

保存力場で力にさからって物体を移動させると、仕事の分だけその物体の持つポテンシャルエネルギーが上がる。重力場では $-mg$ なる保存力（重力）が物体に働いているが、それに逆らう $mg$ の大きさの上向きの力によって物体を $h$ だけ持ち上げると、ポテンシャルエネルギーはそれらの積、つまり力が行った仕事の $mgh$ だけ増えるのである。

一次元のポテンシャル場 $U(x)$ の中で、最初に $x_0$ にあった物体を $x_1$ まで動かしたとする。最初と最後におけるポテンシャルエネルギーの差は、力 $f(x)(= -\partial U/\partial x)$ に逆らって行った仕事に等しくなる。

$$U(x_1) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$$

より一般的な三次元の場合には

$$U_{P_1} - U_{P_0} = -\int_{P_0}^{P_1} \boldsymbol{f}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{s}$$

最後の積分は**線積分**と呼ばれ、ベクトルである $\boldsymbol{f}$ を、積分経路に沿って $P_0$ から $P_1$ まで、経路上の線素 $d\boldsymbol{s}$ への射影を積分していったものである。

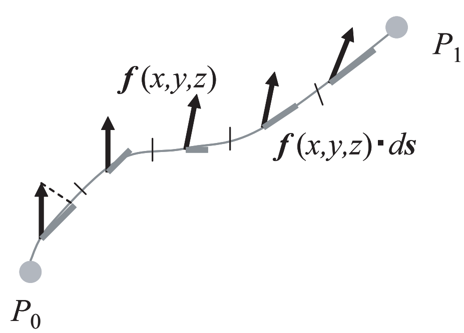


図 4. 線積分の概念。力の場 $\boldsymbol{f}$ を $P_0$ から $P_1$ まで線積分するということは、力の線素 $d\boldsymbol{s}$ の方向の成分を足し合わせること。

ポテンシャルを持つ力の場では、始点と終点が同じならどのような経路をとっても仕事の量は始点と終点でのポテンシャルの差であるから同じになる。身近な例で言うと、ある山の山頂に登るためにいくつかある登山道のどれをえらんでも仕事の量（体の疲れ）は始点と終点の標高差（ポテンシャルエネルギーの差）にのみ依存して登山道にはよらない（はずである）。

(b) ポテンシャル場とその勾配

一般に、座標によって物理量が様々な値をとるものを**場** (field) と呼ぶ。物理量がスカラーであるスカラー場としては、温度場やここで述べたポテンシャルなどがある。ベクトル場としては重力場、電場、磁場などがあり、大きさと向きを持っている。スカラー場であるポテンシャルと、その空間微分でありベクトル場である力は次のような関係を持っている。

$$\boldsymbol{f} = (f_x, f_y, f_z) = -\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} U(x, y, z)$$

このような関係は、スカラー場の**勾配** (gradient) を用いて

$$\boldsymbol{f} = -\nabla U(x, y, z)$$

と表すことができる。ベクトル量である勾配は、$U$ というスカラー量が、その地点から少し動いたときにもっとも大きくなる方向（最大勾配の方向）を向いており、その大きさはその向きに単位長さ動いたときのスカラー量の変化の大きさである。質点に働く保存力の方向は、ポテンシャルの (最大）勾配の方向の反対を向いており、その大きさはその (最大) 勾配に等しい。