物理学 1 講義ノート その 6

日置 幸介

1. 極座標での運動方程式

   (x, y, z) から成る直交座標で解けない問題が (r, θ, ϕ) を用いた**極座標**では解けることがある。力学では**ケプラー運動**（惑星や衛星の中心天体の周りの公転運動、二体問題）を理解するために極座標の学習が欠かせない。ここでは二次元の問題に限り極座標での運動方程式を求める。ケプラー運動のように中心力による運動は同一平面内で行われるため、二次元の扱いでも一通り事足りるのである（講義ノートその４参照)。ある点の座標 (x, y) と (r, θ) の間には

   $$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

   の関係がある。

2. 極座標での速度と加速度

   (a) 座標の回転

   二次元の直交座標を反時計周りに角度 θ だけ回転させる。ある点の回転前の座標での座標の値 (x, y) が、回転させた後の座標では (X, Y) になったとする。それらの関係は

   $$x = X\cos\theta - Y\sin\theta$$

   $$y = X\sin\theta + Y\cos\theta$$

   と書き表せる。2×2 の座標回転行列を導入するとこれは以下のように書きなおせる。

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

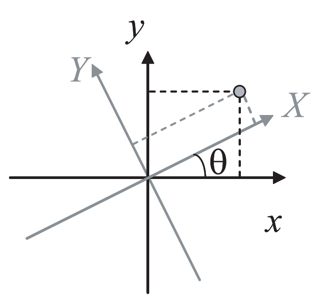

   図 1. 座標の回転。点のもとの座標系での位置 (x, y) と新しい座標系での位置 (X, Y) は上の式のような関係になっている。

   (b) 速度の r 成分と θ 成分

   極座標における「r 方向」は動径方向（原点からその点に向かう方向）であり、「θ 方向」は原点からの距離は変わらずに方位角が変化する方向である。両者は直交しており、x, y 座標系に対して反時計回りに角度 θ だけ回転したものである。すなわち、直交座標における速度と極座標における速度の関係式を導き、前節に登場した式中の (X, Y) に相当するものを見つければ、それが極座標における速度に他ならない。

   $$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

を微分すると

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

となるから

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

すなわち $\dot{r}$ と $r\dot{\theta}$ が速度の r 成分と θ 成分である。極座標では、単純に $\dot{r}$ と $\dot{\theta}$ が速度の r 成分と θ 成分になるのではないのである。

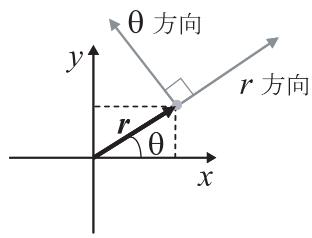

図 2. 直交座標における x, y 方向と極座標での r, θ 方向の関係。

（c）加速度の r 成分と θ 成分

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

の最初の式をさらに時間で微分すると $\ddot{x}$ に関する式がえられる。

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta$$

これを整理すると、

$$\ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\cos\theta - (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\sin\theta$$

$\ddot{y}$ に関する式も同様に

$$\ddot{y} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\sin\theta + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\cos\theta$$

となる。すなわち

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

となる。つまり極座標における r、θ 方向の加速度はそれぞれ $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$、および $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ となることがわかる。従って極座標における運動方程式は、

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

と表すことができる。なお二つ目の式は

$$F_\theta = m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$$

と書き換えることもできる。直交座標では質点が運動しても x、y 座標の軸そのものが動くことはないので加速度も単純に $\ddot{x}$ や $\ddot{y}$ で良い。一方極座標では、運動によって位置が変わることで r の方向が変わってしまうために、速度成分が単純に $\ddot{r}$ や $r\ddot{\theta}$ とならずに、このような複雑な形になってしまうのである。

3. 動く直交座標での運動方程式

ある慣性系に対して等速直線運動しているが回転はしていない座標における運動方程式は、もとの慣性系での運動方程式と同じである。すなわち新しい座標系も慣性系である。もとの座標系 (x, y, z) での運動方程式を

$$m\ddot{x} = F_x \qquad m\ddot{y} = F_y \qquad m\ddot{z} = F_z$$

とする。それに対して (v_x, v_y, v_z) の一定速度で運動する座標系 (X, Y, Z)、すなわち

$$x = v_x t + X \qquad y = v_y t + Y \qquad z = v_z t + Z$$

を考えると、新しい座標系での運動方程式は、運動方程式の (x, y, z) に上の式を代入すると得られるが、

$$m\ddot{X} = F_x \qquad m\ddot{Y} = F_y \qquad m\ddot{Z} = F_z$$

と座標を入れ替えただけでそのままの形になる。二回時間で微分する際に等速運動を示す項が消えてしまうからである。このような座標変換は**ガリレイ変換**と呼ばれる。

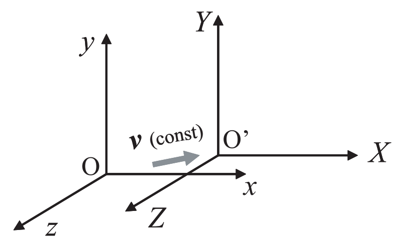

図 3. 慣性系 (O, x, y, z) に対して等速直線運動する座標系 (O', X, Y, Z) の間では同じ運動方程式が成り立つ。

ここでは「非慣性系」、すなわち座標系が慣性系に対して等加速直線運動する場合、および一定の角速度で回転する場合の運動方程式を考えてみる。

(a) 慣性系に対して等加速直線運動する座標系での運動方程式

上の例で、もとの座標系 (x, y, z) に対して速度が一定でなく、(a_x, a_y, a_z) の加速度をもつ座標系 (X, Y, Z) を考える。すなわち、

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_x t + X \qquad y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_y t + Y \qquad z = \frac{1}{2}a_z t^2 + v_z t + Z$$

そこでの運動方程式は

$$m(\ddot{X} + a_x) = F_x \qquad m(\ddot{Y} + a_y) = F_y \qquad m(\ddot{Z} + a_z) = F_z$$

となる。ここで左辺の一部を右辺に移項すると、

$$m\ddot{X} = F_x - ma_x \qquad m\ddot{Y} = F_y - ma_y \qquad m\ddot{Z} = F_z - ma_z$$

すなわち、等加速直線運動する座標系から見ると本来の力 (F_x, F_y, F_z) に加えて、$(-ma_x, -ma_y, -ma_z)$ で表される見かけの力があたかも働いていると考えても良い。この見かけの力のことを**慣性力**とよぶ。上昇を始めたエレベーターの中で加速度（上向き）と反対側に感じる力（下向きに床に押し付けられる力）が慣性力である。

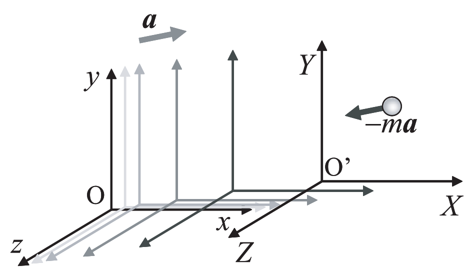

図 4. 慣性系 (O, x, y, z) に対して加速度 $\boldsymbol{a}$ で等加速直線運動する座標系 (O', X, Y, Z) では見かけの力 $-m\boldsymbol{a}$ が働く。

（b）回転する座標系での運動方程式

地球は自転しており、地球に固定された座標系も慣性系（例えば太陽系の重心に固定した座標系）に対して回転している。回転する座標系では**遠心力**や**転向力（コリオリ力）**などの見かけの力が働くが、地球上を大きく移動する大気や海洋の運動を議論するときにはこれらの力の存在が重要となってくる。今回転する座標系 (X, Y, Z) の回転角速度を ω、回る向きを反時計周りとすると、

$$x = X\cos\omega t - Y\sin\omega t$$

$$y = X\sin\omega t + Y\cos\omega t$$

と書ける。

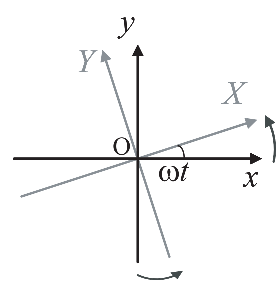

図 5. 慣性系 (O, x, y, z) に対して座標系 (O, X, Y, Z) は角速度 ω で回転運動している。

あとは極座標でやったようにこれを時間で微分してゆけばよい。まず一回微分して速度を求める。

$$\dot{x} = (\dot{X} - \omega Y)\cos\omega t - (\dot{Y} + \omega X)\sin\omega t$$

$$\dot{y} = (\dot{X} - \omega Y)\sin\omega t + (\dot{Y} + \omega X)\cos\omega t$$

もう一度時間微分して加速度を求める。

$$\ddot{x} = (\ddot{X} - 2\omega\dot{Y} - \omega^2 X)\cos\omega t - (\ddot{Y} + 2\omega\dot{X} - \omega^2 Y)\sin\omega t$$

$$\ddot{y} = (\ddot{X} - 2\omega\dot{Y} - \omega^2 X)\sin\omega t + (\ddot{Y} + 2\omega\dot{X} - \omega^2 Y)\cos\omega t$$

行列で書けば

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X} - 2\omega\dot{Y} - \omega^2 X \\ \ddot{Y} + 2\omega\dot{X} - \omega^2 Y \end{pmatrix}$$

従って回転する座標での運動方程式は

$$m(\ddot{X} - 2\omega\dot{Y} - \omega^2 X) = F_X \qquad m(\ddot{Y} + 2\omega\dot{X} - \omega^2 Y) = F_Y$$

と表せる。左辺の一部を移項して

$$m\ddot{X} = F_X + 2m\omega\dot{Y} + m\omega^2 X \qquad m\ddot{Y} = F_Y - 2m\omega\dot{X} + m\omega^2 Y$$

右辺の二項目がコリオリ力、三項目が遠心力で、いずれも回転する座標系から見ることによって生じる見かけの力である。遠心力は回転する座標系から見て静止した質点にも働くが、コリオリ力は動いている質点にのみ働く（その強さは速度に比例する)。地球に固定された座標系でみると、北半球では動く質点は右向きに、南半球では左向きにコリオリ力が働く。低気圧があったとき、風が圧力の低い低気圧の中心に素直に向かないで渦巻きになるのはコリオリ力の働きである。渦巻きの向きは北半球と南半球で反対となる。

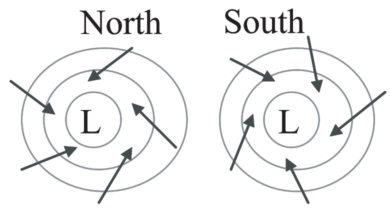

図 6. 北半球の低気圧と南半球の低気圧では、コリオリ力の向きが反対になるため、中心に吹き込む風の渦が逆まわりになる。