物理学 1 講義ノート その 7

日置 幸介

1. 惑星の運動

   よく知られているように、地球を始めとする惑星は太陽の周りをケプラーの法則にしたがって公転運動をしている。

   - ケプラーの第一法則： 惑星は太陽を焦点のひとつとする楕円軌道を描く
   - ケプラーの第二法則： 惑星の太陽のまわりの面積速度は時間にかかわらず一定である
   - ケプラーの第三法則： 惑星の周期の二乗は長半径の三乗に比例する

   今回は、これまで学習した古典的力学でこれらの法則の理解を目指す。

   極座標における運動方程式は、

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

   と表すことができる。惑星の運動（ケプラー運動）を導出するためには、この式の左辺を $F_r = GMm/r^2$（中心天体による万有引力）および $F_\theta = 0$ と置き換えて解けばよい。しかしこの方法はやや難解なのでここでは（やや平易な）エネルギー保存則から楕円軌道を導出する方法を紹介する。

   (a) 角運動量の保存

   運動方程式の二つ目の式は

$$F_\theta = m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$$

   と書き換えることもできることを前回述べたが、$F_\theta = 0$ を代入して

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$$

   とするとこれは結局

$$r^2\dot{\theta} = h \qquad (一定)$$

   という角運動量保存の式になる。これは中心天体と惑星を結ぶ直線が一定時間に覆う面積（面積速度）が一定であるというケプラーの第二法則に他ならない。

   (b) 力学的エネルギーの保存

   極座標で表された速度は $\dot{r}$ と $r\dot{\theta}$ である。従って運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

   と書き表せる。一方位置エネルギーは $-GMm/r$ であるから、力学的エネルギー保存則は全エネルギーを E とすると

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - G\frac{Mm}{r} = E$$

   となる。この式と (a) で述べた角運動量保存則を組み合わせれば惑星の軌道が楕円であることを導くことができる。

（c）r と θ の方程式

(a) と (b) の結果を組み合わせて、時間 t を消去して r と θ の関係式としてみよう。角運動量保存の式より

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

となる。ただし h は角運動量である。また r の時間微分も

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

力学的エネルギー保存の式にこれらを代入すると

$$\frac{1}{2}m\left[\frac{h^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2}\right] - G\frac{Mm}{r} = E$$

となる。整理して

$$\frac{mh^2}{2r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{mh^2}{2r^2} - G\frac{Mm}{r} = E \qquad \text{さらに} \qquad \pm\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{GMm}{r} - \frac{mh^2}{2r^2}\right)}$$

r と θ が変数分離できて

$$\frac{\pm\, hdr}{r^2\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E + \dfrac{GMm}{r} - \dfrac{mh^2}{2r^2}\right)}} = d\theta$$

これを積分すれば r と θ が満たすべき関係式が導かれ、そこから軌跡がわかる。

（d）楕円軌道の導出

ここで余弦の逆関数の微分公式

$$(\cos^{-1} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

を用いる。前節で求めた式で $1/r$ を z と置くと次のように簡単な形になる。

$$\frac{\mp\, dz}{\sqrt{\dfrac{2E}{mh^2} + 2\dfrac{GM}{h^2}z - z^2}} = d\theta$$

これを

$$\frac{\mp\, dz}{\sqrt{\dfrac{2E}{mh^2} + \dfrac{G^2M^2}{h^4} - \left(z - \dfrac{GM}{h^2}\right)^2}} = d\theta$$

とすれば上記の公式を用いて積分できて、

$$\pm\cos^{-1}\frac{z-\dfrac{GM}{h^2}}{\sqrt{\dfrac{2E}{mh^2}+\dfrac{G^2M^2}{h^4}}}=\theta-\alpha$$

となる。ここで α は積分定数である。両辺の cos をとってさらに z を r に戻せば

$$r=\frac{\dfrac{h^2}{GM}}{1+\sqrt{1+\dfrac{2Eh^2}{G^2mM^2}}\cos(\theta-\alpha)}$$

ここで

$$\frac{h^2}{GM}=l \qquad \sqrt{1+\frac{2Eh^2}{G^2mM^2}}=e$$

とおけば、極座標における楕円の方程式

$$r=\frac{l}{1+e\cos(\theta-\alpha)}$$

となる。e は楕円の扁平の度合いをあらわす離心率 (eccentricity)、l は半直弦と呼ばれ、軌道長半径を a とすると $a(1-e^2)$ に等しい。すなわち惑星は中心天体を焦点とする楕円軌道を描くというケプラーの第一法則が示された。

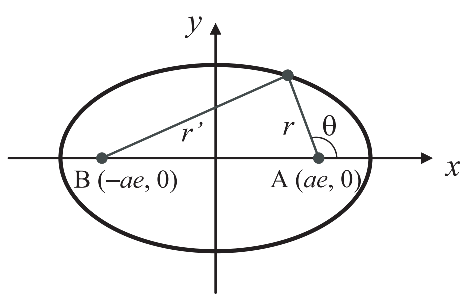

図 1. 楕円は二つの焦点 A と B からの距離の和 $r+r'$ が一定の点の集合として定義される。長半径を a とすると焦点の座標は e を離心率として $(ae,0)$ と $(-ae,0)$ で表される。図の楕円の方程式は $r=a(1-e^2)/(1+e\cos\theta)$ である。

2. 様々な軌道

前の章で

$$r=\frac{l}{1+e\cos(\theta-\alpha)}$$

を楕円の式としたが、実際にはこれは楕円、放物線、双曲線で構成される**円錐曲線**の一般的な式である。円錐曲線は空間に定まったある点（焦点）とある直線への距離の比が一定値になる曲線である。その比が離心率 e であり、$e<1$ の時に楕円、$e=1$ の時に放物線、$e>1$ の時に双曲線となる。

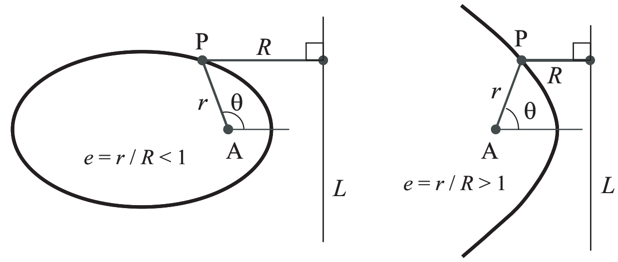

図 2. 楕円も双曲線も焦点 A と直線 L からの距離の比 $e = r/R$ が一定の点の集合として定義され、同じ形の式 $r = l/(1 + e\cos\theta)$ で表される。比が 1 より小さいときは楕円（左)、大きいときは双曲線（右）になる。

(a) 楕円か双曲線か

既に求めたように離心率は

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{G^2mM^2}}$$

と表される。従って軌道は力学的エネルギー E が正なら $e > 1$ で双曲線になり、一方 E が負なら $e < 1$ で楕円軌道になることがわかる。位置エネルギーの基準は無限遠であるから、全力学的エネルギーが負ということはその質点（この場合は惑星）は無限遠に到達できない、すなわち中心天体に捕らえられた惑星ということになる。逆に太陽系内で双曲線軌道（全力学的エネルギーが正）の飛翔体が見つかったとすると、それは太陽系の外から来た物体に他ならない。

(b) 楕円軌道のエネルギーと軌道周期

軌道長半径 a は

$$a = \frac{l}{(1 - e^2)}$$

で表されるが、それに前章で求めた l と e を代入すると

$$a = -\frac{GmM}{2E}$$

と表される。なお楕円軌道の場合は E が負なので、上記の a は正である。中心天体と惑星の質量が同じであれば軌道長半径はエネルギーで決まるのである。一方軌道短半径 b は $b = \sqrt{la}$ として求められる。楕円の面積は πab であり、面積速度は $h/2$ で一定であるから軌道周期 T は

$$T = \frac{\pi ab}{h/2}$$

となり、$b = \sqrt{la}$ と $l = h^2/GM$ を入れれば

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \qquad \text{或いは} \qquad T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

となり、惑星の周期の二乗が軌道長半径の三乗に比例するというケプラーの第三法則が導かれる。