物理学 1 講義ノート その 8

日置 幸介

1. 波動

   波動は、水の波、音波（空気中を伝わる縦波）、地震波（弾性体中を伝わる縦波や横波）、電磁波（空間を光速で伝わる電場と磁場の波動）など、自然界に多く見られる物理現象である。ここではその入門として、波動方程式、その簡単な解、波の反射、正弦波の重ね合わせなどを弦の振動を中心に解説する。

2. 弦の振動を表す方程式

   無限に長い弦に T という一様な張力がかかっているとする。また弦の材質は一様で線密度を σ とする。弦の方向を x 軸に、振動が生じるそれに直角な方向に y 軸をとる。弦の微小部分 dx にかかる y 方向の力 $F_y(x)$ は

$$F_y(x) = T\sin\theta(x+dx) - T\sin\theta(x)$$

   と書き表せる。ここで $\theta(x)$ は、弦が x 軸となす角度で x の関数である。

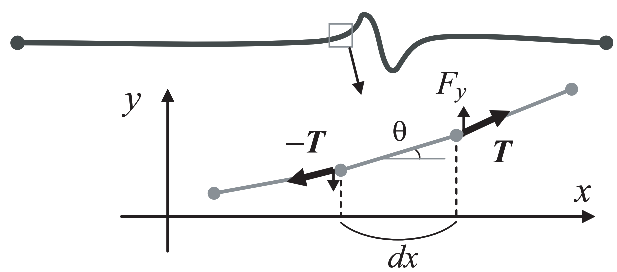

図 1. 長い弦の一部分を拡大して、長さ dx の微小部分について y 方向の運動を考える。

   今 θ は微小だとすると $\sin\theta \simeq \tan\theta$ で、かつ $\tan\theta = \partial y/\partial x$ である。すなわち

$$F_y(x) = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$$

   従って、この弦の微小部分 (質量 σdx) の y 軸方向の運動方程式は次のようになる。

$$F_y(x) = \sigma dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \text{上の } F_y(x) \text{ を代入して} \qquad T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx = \sigma dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

   変形して

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

   ここでは $c = \sqrt{T/\sigma}$ と置いた。これが弦の**波動方程式**である。

3. 波動方程式の一般解

   任意の量 ψ が一次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

   を満たすとき、その一つの解は

$$\psi(x,t) = f(x-ct)$$

である。なぜなら

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x - ct)$$

であるし、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 f''(x - ct)$$

であるからである。

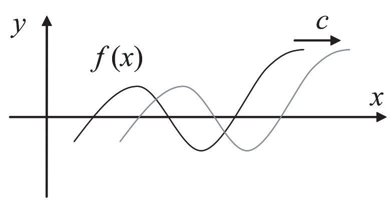

図 2. 波動方程式の解のひとつは時刻ゼロにおける関数 $f(x)$ が速度 c で右に動くもの。

一般には x の正の方向に進む波と負の方向に進む波を合わせた

$$\psi = f(x - ct) + g(x + ct)$$

が解となる。弦の「振れ」は速度 c で x の正と負の方向に伝搬する。これが弦を伝わる波である。

4. 波動方程式の特殊解

(a) 波形の初期条件を与えた場合

簡単な特殊解として初期条件での波形が与えられた場合を考える。時刻ゼロ ($t = 0$) での波形を $y_0(x)$、速度は全体でゼロとする（初期波形から $t = 0$ でそっと手を離した状態)。一般解に時刻ゼロを代入して、

$$y_0(x) = y(x, 0) = f(x) + g(x)$$

また速度ゼロから

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = -c\frac{df(x)}{dx} + c\frac{dg(x)}{dx} = 0$$

である。二つ目の式から $f(x) = g(x)$ と考えると

$$f(x) = g(x) = \frac{1}{2}y_0(x) \qquad \text{つまり} \qquad y(x,t) = \frac{1}{2}[y_0(x - ct) + y_0(x + ct)]$$

要するに y_0 と同じ形の波が振幅が半分になって片方は右に、もう片方は左に進行することになる。

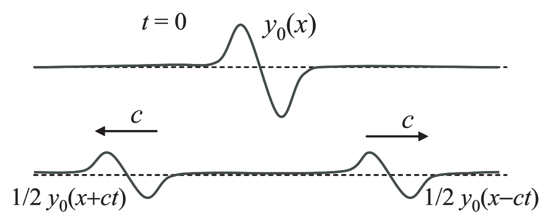

図 3. 時刻ゼロで $y_0(x)$ の形をもった波の伝播。半分の振幅をもった同じ形の波が正と負の方向に伝播する。

(b) 固定端がある場合

これまでは無限に長い弦の中を伝搬する波動（進行波）について述べてきたが、弦がある点 $(x = 0)$ で終わっていてその端が固定されている場合を考える。波動方程式の一般解は、x の正の方向に進む波（右辺第一項）と負の方向に進む波（第二項）を合わせた

$$y = f(x - ct) + g(x + ct)$$

で表わされる。ここで境界が固定されていることから、$x = 0$ で $y = 0$ とするとそこで波動方程式は

$$0 = f(-ct) + g(ct) \qquad \longrightarrow \qquad f(-ct) = -g(ct)$$

を満たす必要がある。すなわち固定端に向かって左に進む波 g と固定端から右に出てゆく波（反射波）f は上下が反転しており、かつ固定端 $x = 0$ に関して対称でなければならない。これを最初の式に入れると

$$y = -g(-x + ct) + g(x + ct)$$

となる。右辺第一項が反射して右に向かう波、第二項が右からやってくる波である。

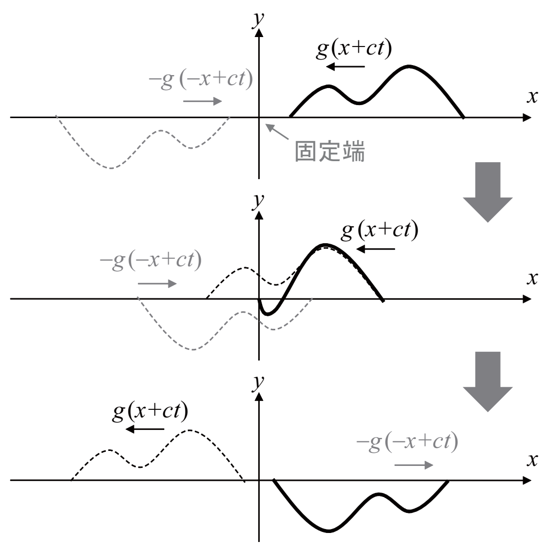

図 4. 右からやってきた波が $x = 0$ にある固定端で反射して右に戻ってゆく様子。固定端での y の値がいつもゼロであることから、この場合の波の反射は上下と左右が逆で別々の向きに伝搬する二つの波の重ね合わせとして考えられる。

5. 様々な波

(a) 縦波と横波

振動の方向と波の進行方向が同じものを縦波、直交するものを横波と呼ぶ。ここで説明した弦の振動は横波である。また水の波も横波である。音波は媒質の粗密が弾性を原動力として伝播してゆく

もので、その振動は縦波である。固体の中を伝わる弾性波（地震波）には音波と同じ縦波（Ｐ波）と横波（Ｓ波）がある。流体中はＳ波は伝わらない。地球深部の溶けた金属でできた中心核は、地震波のＳ波がその中を伝わらないことから発見された。

電磁波は、電場と磁場の振動が空間を伝わるものであるが、電場と磁場と電磁波の進行方向はそれらすべてが直交している。その意味で電磁波は横波の一種である。

(b) 正弦波

波動方程式の解で正弦関数の形をしたものが正弦波である。たとえば

$$\psi(x,t) = A\sin(kx - 2\pi\nu t)$$

は $x - (2\pi\nu/k)t$ の関数であり、速度 $2\pi\nu/k$ で正の方向に伝播する正弦波を示す。k は**波数**と呼ばれ、長さ 2π の中に何個の波が含まれているかを示す量である。従って $2\pi/k$ は**波長** λ である。また ν は**振動数**（同じ x 座標に注目したとき単位時間内に振動する回数）であり、その逆数 $1/\nu$ は**周期** T に他ならない。上の式は

$$\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t) \qquad\qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

と書けるが、ここで ω は**角速度**（角振動数）である。

i. 正弦波の重ね合わせ：うなり

次に振動数や伝搬方向が異なる正弦波が重なる時に生じるいくつかの興味深い現象について述べる。ここでは余弦の和（差）を積に変換する公式、

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

をしばしば使用する。

振動数がわずかに異なる二つの波の重ね合わせを考える。それぞれの角速度を ω_1 と ω_2 とすると空間のある点で観測した二つの波は $\cos\omega_1 t$ と $\cos\omega_2 t$ であったとする。両者を足し合わせ、上で述べた公式を当てはめると

$$\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t = 2\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t \;\; \cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t$$

となる。これは二つの振動数の平均 $(\omega_1+\omega_2)/2$ で振動する成分と、$(\omega_1-\omega_2)/2$ というきわめてゆっくり振動する（振動数の差がわずかな、すなわち $\omega_1-\omega_2$ が小さい）成分の積の形になっている。すなわち二つの似た振動数の波を重ねると、その平均の振動数の波が生じ、その振幅が両振動数の差の振動数で強くなったり弱くなったりする。これが**うなり**である。

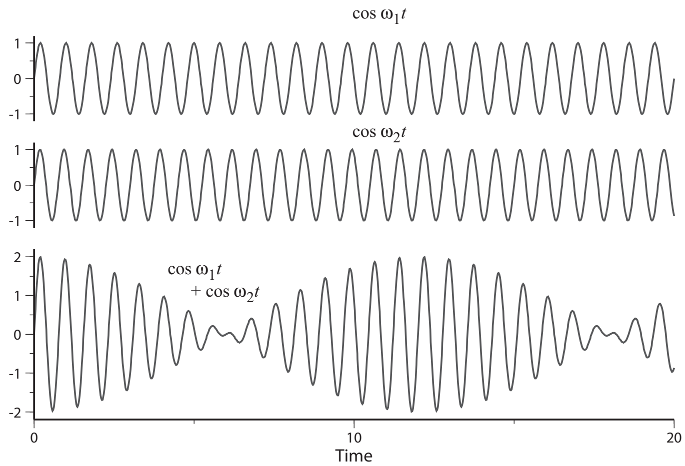

図 5. 角速度 ω_1 の正弦波（上）と ω_2 の正弦波（中）を重ね合わせた合成波（下）は、ω_1 と ω_2 の中間の周波数で、両周波数の差の周波数で振幅が変わる（うなり）振動となる。

ii. 正弦波の重ね合わせ：定在波

次に固定端に向かって進行する正弦波と固定端で反射してきた波との重ね合わせを考えてみる。前者を $A\cos(kx+\omega t)$ とすると反射波は $-A\cos(-kx+\omega t)$ となるはずである。その合計は差を積にする公式を用いると、

$$A\cos(kx+\omega t) - A\cos(-kx+\omega t) = -2A\sin kx \sin \omega t$$

となる。この右辺を良く見ると、時間に依存しない項 $-2A\sin kx$ と空間に依存しない項 $\sin\omega t$ の積となっている。つまり空間に固定された $-2A\sin kx$ という波が、伝搬するのではなくその場で振幅が $\sin\omega t$ に従って時間変化するようなものとなる。これを進行波と区別して**定在波**（定常波）と呼ぶ。

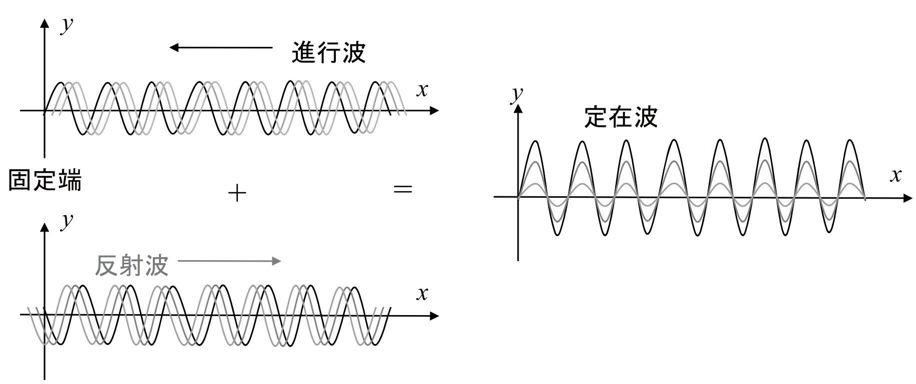

図 6. 固定端に向かって進んでゆく波（左上）とそこから反射してきた波（左下）が足しあわされた結果、伝搬せずに振幅だけが変化する定在波（右）が生じる。

iii. 閉じ込められた正弦波：固有振動

最後に両方に固定端があり、その間に閉じ込められた正弦波を考える。前の項目で、進行波と反射波が重なると定在波が生じることを示したが、その波長については特に制限はなくどのような波長（あるいは周波数）の波でも存在できる。しかし両端が固定されていると、数限りなくある定在波のうち、両端で振幅がゼロになるものだけが存在を許される。前の項の例で固定端が $x = 0$ だけでなく $x = L$ のところにもあると考える（L は例えば弦の長さと考えればよい）。そこでは $\sin kL = 0$ を満たす k だけが許される。すなわち n を自然数とすると $kL = n\pi$ となり、波の速さを $c(= \omega/k)$ とすると角振動数 ω と波長 λ は

$$\omega = kc = \frac{n\pi c}{L} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n}$$

を満たすとびとびの値をとる。これが弦を振動させると固有の音がでる理由である。ω のうち最も小さな値のもの $(n = 1)$ が**固有振動**（モード）のうちの**基準振動**であり、振幅がゼロになる固定端を**節**（node）、最大になる弦の中央部を**腹**（loop）と呼ぶ。

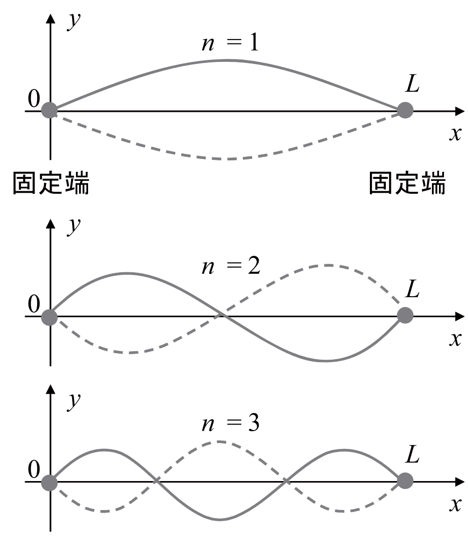

図 7. 両側を固定端に囲まれた弦は、もはやどんな周波数（波長）でも許されるわけではなく、固定端の変位が常時ゼロとなるとびとびの値しかとることができない。ここでは n が 1 から 3 の例を示した。