物理学 3 講義ノート その１

日置 幸介

1. マックスウェル方程式
   下記のマックスウェル方程式をとりあえず理解するのが本講義の目的である。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{i}$$

   但し $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$ はそれぞれ電場 (electric field) と電束密度 (electric flux density)、$\boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}$ はそれぞれ磁場の強さ (magnetic field strength) と磁束密度 (magnetic flux density) である。単に電場、磁場という場合、より基本的な物理量である $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ を指すことが多い。$\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}$ を使わずに $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ だけで表したマックスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{i}}{\epsilon_0}$$

   となる。$\rho, \boldsymbol{i}$ はそれぞれ電荷密度と電流密度である。ナブラ記号 ∇ については以下で説明する。

2. スカラー場、ベクトル場の微分
   grad, curl(rot), div 等の演算子について学ぶ。またそれらの組み合わせに関する基本的な法則を導入する。
   スカラー場の例：温度場、電位（電気ポテンシャル）、重力ポテンシャル
   ベクトル場の例：熱流量、電場、磁場、重力場
   (a) 基本演算

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_y B_z - A_z B_y,\ A_z B_x - A_x B_z,\ A_x B_y - A_y B_z)$$

   (b) 重要な恒等式

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = 0 \qquad \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0$$

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} \qquad \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$$

   (c) スカラー場の勾配　∇
   演算子 ∇(grad、gradient) を用いてスカラー場からベクトル場に変換できる。

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

   例えば $\boldsymbol{E} = -\nabla \Phi$ で電位場から電場が求められる。grad は勾配ベクトルを求める演算子である。

(d) ベクトル場の発散　$\nabla\cdot$

演算子 $\nabla\cdot$ でベクトル場の発散 (スカラー) を求めることができる。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z}$$

$\nabla\cdot$ は div(divergence) とも呼ばれる。すなわち $\nabla\cdot\boldsymbol{h}$ =div $\boldsymbol{h}$。

(e) ベクトル場の回転　$\nabla\times$

演算子 $\nabla\times$ でベクトル場の回転（ベクトル）を求めることができる。

$$\nabla\times\boldsymbol{h} = \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z},\ \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x},\ \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}\right)$$

$\nabla\times$ は rot(rotation) あるいは curl (回転) とも呼ばれる。すなわち $\nabla\times\boldsymbol{h}$ =rot $\boldsymbol{h}$ =curl$\boldsymbol{h}$。

(f) ベクトル場の 2 階微分

i. ラプラシアン

$$\nabla\cdot(\nabla T) = \nabla^2 T = \triangle T$$

ii. スカラーポテンシャル

$$\nabla\times(\nabla T) = 0 \qquad cf. \quad \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}T) = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})T = 0$$

定理：ベクトル場の curl (rot) がゼロならかならずその場はあるスカラー場（スカラーポテンシャル）の grad で表される（$\nabla\times\boldsymbol{A} = 0$ なら $\boldsymbol{A} = \nabla\varphi$ となる φ がある)。

iii. ベクトルポテンシャル

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{h}) = 0 \qquad cf. \quad \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = 0$$

定理：ベクトル場の div がゼロならかならずその場はあるベクトル場（ベクトルポテンシャル）の curl (rot) で表される（$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0$ なら $\boldsymbol{D} = \nabla\times\boldsymbol{C}$ となる $\boldsymbol{C}$ がある)。

iv. ベクトル場の二重回転

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{h}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{h}) - (\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{h} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{h}) - \triangle\boldsymbol{h}$$

$cf.$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

3. スカラー場、ベクトル場の積分

線積分の概念を理解し、スカラー場の勾配 (grad) の線積分の物理的意味を考察する。さらにガウスの定理、ストークスの定理を導入する。

(a) $\nabla\varphi$ の線積分

あるスカラー場の grad を 2 点間で線積分すると、そのスカラー場の 2 点間の値の差になる。すなわち

$$\varphi(2) - \varphi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{s}$$

これは線積分の経路となる曲線の取り方によらない。

（b）ガウスの定理

閉曲面を通って外に出る流束の合計の求め方

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} da$$

たとえば熱の場合、この量は曲面内部の熱量の減少に等しい。

$$\int_S \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} da = -\frac{dQ}{dt}$$

今、この曲面を微小な立方体の集合体と考えると、その微小立方体の側面を通した流束の和は流れのベクトル場の divergence になる。また隣り合う立方体の接する面を通して出入りする流束は相殺されるので、最も外側の面の流束のみが残るから

$$\int_S \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n} da = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{C} dV$$

これをガウスの定理と呼ぶ（ちなみにマックスウェル方程式の第一の式である $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ はガウスの法則）。

（c）ストークスの定理

ベクトル場で、閉曲線に沿った線積分（ベクトル場の循環）を考える

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{C} \cdot d\boldsymbol{s}$$

微小な正方形の周囲に沿った循環は以下のようになる。

$$\oint \boldsymbol{C} \cdot d\boldsymbol{s} = C_x(1)\Delta x + C_y(2)\Delta y - C_x(3)\Delta x - C_y(4)\Delta y$$

そこでは

$$C_x(3) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial y}\Delta y \quad C_y(4) = C_y(2) - \frac{\partial C_y}{\partial x}\Delta x$$

だから、正方形の回りの循環は、

$$\left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y = (\nabla \times \boldsymbol{C})\Delta x \Delta y$$

となる。閉曲線を微小な正方形の集合体と考えると、その微小正方形の共通の側面に沿った積分は相殺し、最も外側の辺の積分のみが残るから

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{C} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{C})_n da$$

これをストークスの定理と呼ぶ。ただし法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は閉曲面を積分の方向に回ったときにねじが進む向きにとる。