物理学 3 講義ノート その2

日置 幸介

1. マックスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{i}}{\epsilon_0}$$

2. 時間変化がない場合の電磁気学

通常のマックスウェル方程式で時間の偏微分が含まれる項をゼロとすると、時間変化がない場合（静電場と静磁場）の方程式が得られる。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \qquad c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{i}}{\epsilon_0}$$

時間変化がない場合、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ が同時に入る式がなくなるため、磁場と電場は別々に扱うことができる。電場は rotation (curl) がゼロで divergence が電荷密度分布として与えられている。磁場は divergence がゼロで rotation (curl) が電流密度分布として与えられている。

(a) クーロンの法則

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\boldsymbol{e}_{12} = -\boldsymbol{F}_2$$

ただし $\boldsymbol{e}_{12}$ は q_2 から q_1 に向かう単位ベクトル。クーロンの法則は重ね合わせが可能である。$1/4\pi\epsilon_0$ はおよそ 9.0×10^9 Nm^2/(クーロン)^2 となり、たとえば万有引力定数 G がわずか 6.7×10^{-11} Nm^2/kg^2 であることを考えると巨大である。ちなみに二個の電子どうしに働く電磁力は引力の 4.2×10^{42} 倍である。

(b) 電場

単位電荷あたりの力を電場と呼ぶ。

$$\boldsymbol{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_{12}^2}\boldsymbol{e}_{12}$$

成分で書くと

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}$$

(c) 電位

電気力に逆らって単位電荷を動かすときの仕事量が電位である。

$$-\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \phi(\mathrm{b}) - \phi(\mathrm{a})$$

電位は無限遠を基準にすることが多い。q の電荷がそのまわりにつくる電位は

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

である。$\boldsymbol{E}$ がベクトル場であるのに対して ϕ はスカラー場である。多くの電荷がある場合も上の式を $\phi = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_i}$ として重ね合わせるだけでよい。$\boldsymbol{E}$ は ϕ を空間微分することによって簡単に得られる。

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$$

(d) ガウスの法則

電荷 Q の回りに任意の閉曲面 S_0 と半径 R の球を考える。電荷からある方向に円錐をとったとき、それが閉曲面と交わる微小面積は、Q から微小面までの距離を r とすると球と交わる面積の $(r/R)^2$ 倍である。微小面に直交する電場は $(Q/4\pi\epsilon_0)\cos\theta/r^2$ であり、これと微小面積との積は円錐が球と交わる電場と微小面 df の積に等しい。それらを閉曲面全体で面積分すると

$$\int_{S_0} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

これが積分型のガウスの法則である。また電束密度 $\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E}$ を用いて

$$\int_{S_0} D_n dS = \int_V \rho(\boldsymbol{x})dV$$

とも書ける。ガウスの定理（ガウスの法則ではない）によると左辺は $\boldsymbol{D}$ の発散を体積積分したものに等しくなるので

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x})$$

と書ける。これがガウスの法則の微分型である。

(e) 静電ポテンシャルの回転

静電場中に任意の閉曲線 C_0 考え、その周囲に沿って電場を線積分する。電場は静電ポテンシャルの gradient で表されるから閉曲線にそった電場の線積分は一般にゼロになる。したがって

$$\int_{C_0} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

閉曲線として x 軸に垂直な微小正方形をとると、その値は $\nabla\times\boldsymbol{E}$ の x 成分となる。一般に

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$$

これはマックスウェル方程式のファラデーの電磁誘導の法則を表す式の、時間変化のない場合に相当する法則である。

(f) ガウスの法則を用いて電場を求める

i. 球対象の電場

半径 a の球の内部に一様に分布する電荷 Q がつくる、(1) 球内部の電場、(2) 球の外部の電場、を電場の球対称性とガウスの法則を用いて求める。E は半径のみの関数で球面に垂直だから、外部では

$$\int_{S_0} D_n dS = 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r) = Q$$

より $E(r) = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ となり、点電荷と同じ式になり、電場の強度は距離の二乗に逆比例する。一方内部では球内の電荷が $(r^3/a^3)\cdot Q$ であるから

$$4\pi\epsilon_0 r^2 E(r) = \frac{r^3}{a^3}\cdot\frac{Q}{\epsilon_0}$$

より

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3}\cdot r$$

となる。

ii. 線電荷がつくる電場
単位長さあたりの電荷が λ である線電荷のつくる電場は線に垂直で外側または内側に向く。したがって

$$E(r)\cdot 2\pi r = \lambda/\epsilon_0$$

から

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

であり、電場の強度は半径の一乗に逆比例する。

iii. 面電荷がつくる電場
単位面積あたり電荷が σ の、無限に広がった平面状の電荷が作る電場を考える。電場は面に垂直なので、面をつき通す箱を考えると電場が貫くのは二つの面なので

$$2\cdot E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

となり、距離 r に関わらない一様な電場となる。