物理学 3 講義ノート その 3

日置 幸介

1. マックスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{i}$$

2. 静電ポテンシャルの方程式
静電場を求めるために必要な二つの方程式。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

rot(curl) がゼロである（保存力場）から、$\boldsymbol{E}$ はあるスカラー場（静電ポテンシャル）の grad で現されることがわかる。

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi$$

これを二つの方程式の前者に代入するとポアッソン方程式が得られる。

$$\nabla \cdot \nabla \phi \equiv \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

電荷 ρ の空間分布がわかっていれば、点電荷に関するポアッソン方程式の解 ($\phi = q/r$) を空間で積分すればポテンシャルが得られる。簡単で重要な例として双極子の作る静電ポテンシャルを求める。

(a) 電気双極子（「ファインマン物理学」より）
z 軸の方向に距離 d 離れた二つの点電荷 q、$-q$ を考える。それらの作るポテンシャルは

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{[z-(d/2)]^2 + x^2 + y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{[z+(d/2)]^2 + x^2 + y^2}}\right)$$

d に比べて十分遠方でのポテンシャルがどう近似されるかを求める。

$$\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 \approx z^2 - zd$$

ここで $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ とすると、

$$\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2 = r^2 - zd = r^2\left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)$$

だから

$$\frac{1}{\sqrt{[z-(d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2[1-(zd/r^2)]}} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{zd}{r^2}\right)$$

である。同様に

$$\frac{1}{\sqrt{[z+(d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2[1+(zd/r^2)]}} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{zd}{r^2}\right)$$

であるから、

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{r^3}qd$$

となる。今双極子モーメント $p = qd$、および双極子と点 (x, y, z) のなす角度 θ を導入すると $z/r = \cos\theta$ であるから

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

と表される。

（b）電気双極子（「電磁気学の考え方」より）

余弦定理を用いて

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - rd\cos\theta}} + \frac{-q}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + rd\cos\theta}}\right)$$

ここで $r \gg d$ であるから、$(1 \pm x)^{-1/2} \cong 1 \mp x/2$ を用いると

$$\phi(\boldsymbol{r}) \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left\{\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right) - \left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right)\right\} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\cdot\frac{d\cos\theta}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

双極子がつくる電場は $-\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ で計算できる。地球磁場も地球中心においた磁気双極子がつくる磁場として同じように計算できる。

（c）双極子のつくる電場

上でもとめた電位から電場 $\boldsymbol{E} = (-\partial\phi/\partial x, -\partial\phi/\partial y, -\partial\phi/\partial z)$ を求めることができる。

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^3}\cdot(3\cos^2\theta - 1)$$

$$E_\perp \equiv \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^3}\cdot 3\cos\theta\sin\theta$$

となる。$\theta = 0, \pi/2, \pi$ で電場は E_z のみとなり、その大きさは r が等しければ $2 : -1 : 2$ となる。点電荷（単極子）と双極子の電場は、それぞれ地球の重力場および磁場になぞらえることができる。

（d）導体

帯電した導体の内部では、電荷は表面に移動して導体内部の電場をゼロにする。さらに電場 $\boldsymbol{E}$ の発散である電荷密度 ρ も導体中いたるところでゼロとなる。電場がゼロであるので導体は全体が等電位となる。導体表面の電荷密度を σ とすると、それらが導体の外側近傍につくる電場は、面電荷の場合と異なり導体表面をつらぬく箱で電場が貫く面は一つになるため

$$E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

と二倍になる。

（e）鏡像法

導体の表面のうしろに仮想的な映像電荷を置くことによって導体がある場合の電荷を求めることができる。半無限の導体の近くに点電荷を置いた場合の電場は、鏡像のような逆の映像電荷を考えることによって、二つの電荷の重ね合わせで求めることができる。このとき導体表面は等電位面となるという条件は満たされている。

3. 誘電体

電場中に中性の導体を置くと表面に正と負の電荷が現れて（誘導電荷)、導体内部では外部の電場と、それと大きさが等しく向きが反対の誘導電荷のつくる電場がつりあって導体内部の電場がゼロとなる（静電遮蔽)。絶縁体（誘電体）では分極が生じ、導体より小さいが表面に分極電荷が生じて、誘電体内部の電場を小さくする。分極を表す量 $\boldsymbol{P}$ は表面電荷の面密度に等しい（又は単位体積あたりの双極子モーメント）が、これは電場に比例し、電気感受率 χ を用いて

$$\boldsymbol{P} = \chi\epsilon_0\boldsymbol{E}$$

と表される。内部の電場を $\boldsymbol{E}'$ とすると分極は内部電場 $\boldsymbol{E}'$ に比例することを考慮すると

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0} = \boldsymbol{E} - \chi\boldsymbol{E}' \qquad \boldsymbol{E}' = \frac{1}{1+\chi}\boldsymbol{E}$$

ここで $\chi + 1$ は κ と書かれ比誘電率と呼ばれる。真空の誘電率 ϵ_0 に比誘電率 κ をかけた「誘電率」を $\epsilon(=\kappa\epsilon_0)$ とすると $\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E}$ となり誘電率が大きいほど内部電場が弱くなる。導体は誘電率無限大の誘電体とも考えられる。比誘電率 κ は 10 以下の誘電体が多いが、100 を超える「強誘電体」もある。

4. コンデンサー

二枚の導体板を向かい合わせて正負の電荷を与えたものが平行板コンデンサーである。極板間の電位差（静電ポテンシャルの差）V と電荷 Q の間には比例関係があり、その比例係数を静電容量 C と呼ぶ。

$$Q = CV$$

なお、極板の間の電場 E は面電荷の作る電場の二倍となるので、電荷の面密度 σ として $E = \sigma/\epsilon_0$ となり、かつ $E = -\partial\phi/\partial x$ であるから極板間の静電ポテンシャル（電位）ϕ は

$$\phi(x) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}x + (\text{積分定数})$$

となり、極板間の電位差 V は $\sigma d/\epsilon_0$ となる。極板の面積を S とすると $Q = \sigma S$ であるから、$C \equiv Q/V = \epsilon_0 S/d$ となる。

5. 静電場のエネルギー

最初に電荷を持っていないコンデンサーに少しずつ電荷 dq を与えて Q までにするときに要する仕事は（電荷 dq にそのときの電位差をかけたものの和)、電荷が q までたまったときの電位差が q/C であるから、

$$U_e = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

となり、これがコンデンサーが持つエネルギー U_e である。このエネルギーが、極板間の静電場が担っていると考えると、$E = Q/\epsilon_0 S$ でありかつ $C = \epsilon_0 S/d$ であることを考えると

$$U_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 S d$$

となる。ここで Sd は極板間の空間の体積であることに注意。一般に静電場のエネルギーは

$$U_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_V \boldsymbol{E}^2(x,y,z)dv$$

と表される。