物理学 3 講義ノート その 4

日置 幸介

1. 電流

   単位時間に単位面積に垂直な電荷の流れとして電流密度 $\boldsymbol{i}(=\rho\boldsymbol{v})$ を定義する（$\boldsymbol{v}$ は電荷の平均的な速度ベクトル、ρ は電荷密度）。電荷は保存するので

   $$\nabla\cdot\boldsymbol{i}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

   が成り立つ。定常電流では右辺がゼロになる。おなじみのオームの法則（電位差は電流と抵抗 R の積）は、抵抗 R を導線の長さ l と断面積 S で正規化した抵抗率の逆数である電気伝導率 $\sigma=l/RS$ を用いて

   $$\boldsymbol{i}=\sigma\boldsymbol{E}$$

   と表すことができる。

2. 電流がつくる磁場

   電流が流れている二本の導線は、電流が同じ向きの場合引力が、反対向きの場合は斥力が働く。その単位長さあたりの大きさは導線間の距離を r、電流を I_1、I_2 とすると

   $$F=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1I_2}{r}$$

   となる。μ_0 は真空の透磁率で $4\pi\times10^{-7}\mathrm{N/A^2}$ である。この力を電流 I_2 がつくる、ある場 B と電流 I_1 との相互作用として、

   $$F=I_1B \qquad\qquad B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{r}$$

   と考える。B は磁束密度、このような場を磁場と呼ぶ。電流 I_1 が 1A のとき F が 1N になる磁束密度を 1T(テスラ) とする。1T=1N/A·m。電流は、その回りに同心円状の磁束線をもたらす。その向きは磁場の方向にねじを回すと電流の方向にねじが進むようにとる（右ねじの法則）。

3. 静磁場の基本法則

   (a) 磁場のガウスの法則

   仮想的な「磁荷」に対して、力は電気力とクーロンの法則と同様、距離の逆二乗に比例する。しかし磁場は電流がもたらすものであり、電荷に相当する単独の「磁荷」は現実には存在しない。したがって磁束線はかならずつながっており、電荷のまわりの電気力線のような「発散」は存在しない。次の「磁場に関するガウスの法則」が成り立つ。

   $$\int_S\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}da=0 \qquad \text{又は微分形で} \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

   (b) アンペールの法則

   直線電流の回りの閉曲線 C_0 にそった磁場の循環（線素と磁場の内積の線積分）は閉曲線を縁とする曲面を貫く電流の和に等しい。

   $$\oint_{C_0}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=\mu_0I \qquad \text{微分形では} \qquad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{i}$$

   と表される。なお磁場の強さとして $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{B}\equiv\mu_0\boldsymbol{H})$ を導入すると上記の法則は

   $$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}$$

と書くこともできる。磁場が対称な形状をしている場合は電場の場合のガウスの法則の応用のようにアンペールの法則を用いて磁場を求めることができる。

i. 直線電流が距離 r のところにつくる磁場

直線電流の回りの環状の磁場は、電流を円周の長さ $2\pi r$ で割った形になる。

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

ii. 直線状のコイルが内部につくる磁場

コイル中の磁場はコイルに平行なので、単位長さあたりの線の数を n とすると

$$H = nI$$

iii. ドーナツ状のコイルが内部につくる磁場

コイルの総巻数を N、半径を R とすると

$$H = \frac{NI}{2\pi R}$$

(c) 磁場のポテンシャル

$\boldsymbol{B}$ の rot (curl) がゼロでないことから、$\boldsymbol{B}$ が電束密度 $\boldsymbol{D}$ のようにあるスカラーポテンシャルの勾配として表すことができないことがわかる。電位はあっても「磁位」はないのである。その代わり $\boldsymbol{B}$ の発散がゼロであることから、あるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を定義して

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

と表すことが可能である。$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{B}$ のベクトル・ポテンシャルと呼ぶ。

(d) ビオ・サバールの法則

点電荷がつくる静電場を与えるクーロンの法則に相当する磁場の基本法則が、ある電流素片がつくる磁場を与えるビオ・サバールの法則である。電流素片を $I\Delta s$ とするとある点における磁場は

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta s \sin\theta}{r^2}$$

ここで θ は電流素片の向きと、電流素片からその点を結ぶ線（長さ r）のなす角度である。ΔB は二つの直線がつくる面に垂直で Δs から r に回して右ねじがすすむ向きである。ベクトル表記では

$$\Delta \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

となる。

(e) ビオ・サバールの法則の応用

i. 直線電流

無限に長い直線状の導線に電流 I が流れているとき、距離 r の点 P にできる磁場を求める。各電流素片がつくる磁場の向きはいつも同じで直線と点 P を含む面に垂直である。

$$B = \int dB = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I dl \sin\theta}{4\pi(r^2 + l^2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I dl \cos\theta'}{4\pi(r^2 + l^2)}$$

ここで直線 PO と P と dl を結ぶ直線のつくる角を θ' とした（$\theta' = \theta - \pi/2$）。これは線電荷がつくる電場の計算と同じ積分であるので $l = r\tan\theta'$ また $r^2 + l^2 = (r/\cos\theta')^2$ と置き換えれば積分できて

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

と、アンペールの法則で求めた結果と同じになる。

ii. 環状電流

半径 a の円形の電流 I が、中心軸上の高さ z の位置につくる磁束密度を求める。電流のベクトルと位置ベクトルがなす角度は $\pi/2$ なので

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{r^2}$$

平面に平行な成分は積分で消えるので中心軸方向の成分のみを積分する。$\alpha = \cos^{-1}(a/r)$ とすると

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\cos\alpha}{r^2}\int_{C_0} ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\cos\alpha}{r^2}\cdot 2\pi a = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$$

円の中心（$z = 0$）では

$$B(0) = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

となる。なお十分遠方から見ると、環状電流の作る磁場は磁気双極子がつくる磁場に等しく、その双極子モーメント $\boldsymbol{m}$ は

$$\boldsymbol{m} = \mu_0 I \boldsymbol{n} \Delta S$$

となる。ただし ΔS は環状電流がその周囲を流れる微小な面積を表し、$\boldsymbol{n}$ は環状電流が流れる平面の法線方向の単位ベクトルであり、電流に対して右ねじの向きを持つ。