

物理学 3 講義ノート その5

日置 幸介

1. アンペールの力とフレミングの左手の法則

直線電流 I_2 が作る磁場 $B = \mu_0 I_2 / 2\pi R$ のなかにおかれた I_2 に平行な直線電流 I_1 には単位長さあたり $F = I_1 B$ の力がかかる。 I_2 がつくる磁場が渦巻き状であることを考えると、磁場 B と電流 I_1 と力 F はすべて互いに直交する。電流素片 $I\Delta s$ を使ってベクトルで表記すると

$$\Delta \mathbf{F} = I\Delta s \times \mathbf{B}$$

が成り立つ。この力がアンペールの力である。向きに関してはフレミングの左手の法則を用いても得られる。

応用例

一様な静磁場 B の中に一辺の長さが a と b の長方形のコイルに電流 I を流す。上部と下部に働く力はそれぞれ上向きと下向きでつりあう。しかし縦の2辺に流れる電流に働く力は、コイルを磁場に垂直にしようとする偶力となる。コイルが磁場に垂直な面となす角度を θ とすると偶力の大きさは

$$N = F \cdot a \sin \theta = I B a b \sin \theta = I B S \sin \theta$$

である。ここで S はコイルの面積である。最後の表式は平面コイル一般に成り立つ。

2. ローレンツ力

(a) 荷電粒子に働く力

電子や陽子等の荷電粒子を電場や磁場の中に持ち込んだときに働く力がローレンツ力である。電場 E によって電荷 q にかかる力 F は

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

と書き表せる。磁場による力は荷電粒子が運動しているときにのみ働くが、その大きさをアンペールの力 $\Delta \mathbf{F} = I\Delta s \times \mathbf{B}$ から類推する。導線の単位長さあたりの自由荷電粒子数を N 、その速度を v とすると電流 I は qNv に等しくなる。したがって

$$\Delta \mathbf{F} = I\Delta s \times \mathbf{B} = Nqv\Delta s \times \mathbf{B} = N\Delta s \cdot qv \times \mathbf{B}$$

となる。 $N\Delta s$ は長さ Δs の導線中の荷電粒子の数なのでその一粒あたりの力は

$$\mathbf{F} = qv \times \mathbf{B}$$

となる。電場と併せると

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + qv \times \mathbf{B}$$

となり、この力をローレンツ力と呼ぶ。

(b) 一様な磁場内での荷電粒子の運動

一様な静磁場 B 中の電荷 q をもった荷電粒子の運動を調べる。運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = qv \times \mathbf{B}$$

v が B に平行なら力はゼロになり等速直線運動となる。一方 v が B に垂直な平面内にあるときは粒子は等速円運動をする。

$$m \frac{v^2}{r} = qvB$$

と表される。回転半径は

$$r = \frac{mv}{qB}$$

また円運動の角速度は半径に関係なく

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

となる。これをサイクロトロン角速度と呼ぶ。

3. 変位電流：時間変化する電場

(a) 理論的要請

電荷の保存則は

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

であるが、マクスウェル方程式の静磁場に関するアンペールの法則が時間変化する場合も成り立つとすると

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}(\mathbf{x}, t)$$

となる。両辺の発散を取ると

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x}, t)$$

となる。この左辺は恒等的にゼロになり時間変化する電流の電荷保存則と矛盾する。マクスウェルはこの矛盾を解決するために変位電流の考えを導入して、アンペール・マクスウェルの法則とした。

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

右辺第二項が変位電流（電束電流）密度である。両辺の発散をとると左辺はゼロになり一方右辺

$$\nabla \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t))$$

にガウスの法則を適用すると

$$\nabla \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0$$

と電荷保存則そのものとなり、両者の矛盾は解決される。

(b) 直感的要請

アンペールの法則の積分形は

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \Sigma_i I_i$$

であり、任意の曲面を貫く電流の流速がその周縁の閉曲線に関する磁場の循環になっている。回路にコンデンサー（キャパシター）を挿入しても交流なら電流は流れる。ここで電線を囲む閉曲線をとってアンペールの法則を適用する。同じ閉曲線をとってもそれを周縁とする曲面を電線に交わらせることも、コンデンサーの極板の間を通して電線に交わらないようにもでき、アンペー

ルの法則に矛盾が生じる。コンデンサーの極板の間の電束密度 D は極板の電荷の面密度に等しい ($D = Q/S$) が、電荷 Q の時間変化が電流であるから、ここで「電流」 $I = S \partial D / \partial t$ が流れていると考えると矛盾がなくなる。これが変位電流であり $\partial D / \partial t$ が変位電流密度である。

4. ファラデーの法則：電磁誘導

電流は磁場を作るが、磁場そのものは電流をつくらない。回路を貫く磁場（磁束）の時間変化が起電力 (electromotive force) を生み電流を生じさせるのである。磁束の時間変化を生じさせるためには、(1) 磁場を固定してその中で回路を動かす、(2) 回路を固定して磁場を変化させる、のいずれでもかまわない。

(a) ローレンツ力としての理解

上記 (1) はローレンツ力で理解可能である。磁束密度 B の磁場においた四角形（縦 w 、横 L ）の一边を速度 v で動かして四角形の面積を増加させる場合を考える。単位電荷にはたらく力、すなわち電場は vB であり、動く一边の両端に生じる起電力は vBw となる。これは四角形を貫く磁束の変化率にも等しい。

(b) ファラデーの法則

回路を固定して磁場を変化させる場合はローレンツ力によっては理解できない。この場合はファラデーの法則によって磁場の変化が電場を誘導したという考え方をする必要がある。ファラデーの法則の微分形は

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

積分形では

$$\oint_{\Gamma} E \cdot ds = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot n da$$

と表される。この式は回路を動かす場合（上記のローレンツ力による理解が可能な場合）でも成り立つ。