物理学3 講義ノート その6

日置 幸介

1. マクスウェル方程式の書き換え：電磁ポテンシャルと波動方程式（やや高度なため試験範囲外）

   ファラデーの法則 $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ の中の $\boldsymbol{B}$ をベクトルポテンシャルを使って $\nabla\times\boldsymbol{A}$ と表すと

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{A}$$

   となる。時間と空間の微分を入れ替えると

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0$$

   となるので

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$$

   と表すことができる。この $\boldsymbol{E}$ をガウスの法則に代入すると

$$\nabla\cdot\left(-\nabla\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

   書き直すと

$$\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

   となる。

   次にマクスウェル方程式のアンペール・マクスウェルの法則の $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{E}$ をポテンシャルを使って置き換えると

$$c^2\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + \frac{\boldsymbol{i}}{\epsilon_0}$$

   となる。ここで恒等式 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$ を用いて書き直すと

$$-c^2\nabla^2\boldsymbol{A} + c^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi + \frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \frac{\boldsymbol{i}}{\epsilon_0}$$

   となるが、$\boldsymbol{A}$ をゲージ変換（$\boldsymbol{A}$ に、あるスカラーポテンシャルの grad を加えること。そうしても $\boldsymbol{B}$ は変わらない）して $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = -(1/c^2)\partial\phi/\partial t$ とすると、第二と第三の項が打ち消しあうので

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{\boldsymbol{i}}{\epsilon_0 c^2}$$

となり、また ϕ に関する式も

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

と簡単になる。これらの式はマクスウェル方程式と同値だが、自由空間 ($\boldsymbol{i} = 0$ かつ $\rho = 0$) では三次元の波動方程式になる。

2. 平面波

(a) 自由空間のマクスウェル方程式

電荷も電流もない自由空間でのマクスウェル方程式は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0 \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \qquad c^2\nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

と書き表せる。今、$\boldsymbol{E}$ も $\boldsymbol{B}$ も x だけの関数で y や z によらない ($\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ ともに y、z 面内に無限一様に壁のように拡がっている、すなわち平面波である) と仮定し、かつ時間変化する成分のみを考えるとする。第一式と第四式から

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

同じく第二式と第三式から

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

すなわち E_x と B_x は空間的時間的に一定となるので、動的な場に対してそれらはゼロと考える。つまり電場も磁場も進行方向に直角（x 成分がゼロ）である（電磁波は横波)。今電場の方向を y 軸にとる（$\boldsymbol{E}$ が y 成分だけを持つ)。すると第二式の y 成分から

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t} = (\nabla\times\boldsymbol{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$$

となるので $\partial B_y/\partial t = 0$ つまり、動的な場としては B_y もゼロとなる（x 成分もゼロ)。結局 $\boldsymbol{B}$ は z 成分のみとなり、$\boldsymbol{E}$ も $\boldsymbol{B}$ も共に進行方向に直角で、さらに互いに直角である。また第二式の z 成分は

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = (\nabla\times\boldsymbol{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

となる。すなわち第二式のファラデーの法則で残るのは

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

だけとなる。一方、第四式のアンペール・マクスウェルの法則の各成分は

$$c^2(\nabla \times \boldsymbol{B})_x = c^2\frac{\partial B_z}{\partial y} - c^2\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial t}$$
$$c^2(\nabla \times \boldsymbol{B})_y = c^2\frac{\partial B_x}{\partial z} - c^2\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}$$
$$c^2(\nabla \times \boldsymbol{B})_z = c^2\frac{\partial B_y}{\partial x} - c^2\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

となるが、ここに含まれる六個の微分でゼロでないのは $\partial B_z/\partial x$ だけであり、

$$-c^2\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

のみが残る。

(b) 一次元の波動方程式

上で求めた電場と磁場の時間変化と空間変化を関係付ける二つの式

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

と

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}$$

を組み合わせてみよう。最初の式を x について、後の式を t で微分すると、それぞれ

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x} \qquad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

となり、E_y に関しては

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

という式になる。逆に最初の式を t について、後の式を x で微分すると、それぞれ

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x}$$

となり、B_z に関する式

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

が得られる。E_y、B_z のいずれに関する式も x の方向に速度 c で伝搬する波を解とする一次元の波動方程式である。

(c) 波動方程式の一般解

任意の量 ψ が一次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

を満たすとき、その一つの解は

$$\psi(x, t) = f(x - ct)$$

である。なぜなら

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x - ct)$$

であるし、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 f''(x - ct)$$

であるからである。一般には x の正の方向に進む波と負の方向に進む波を合わせた

$$\psi = f(x - ct) + g(x + ct)$$

が解となる。電場、磁場ともに、進行方向に垂直、かつ互いに直角で速度 c で x の正と負の方向に伝搬する。これが電磁波である。

(d) 電場と磁場の振幅比

簡単な解として $B_z = B_0 \sin(x - ct)$ として $\partial E_y/\partial x = -\partial B_z/\partial t$ に代入すると、

$$\partial E_y/\partial x = cB_0 \cos(x - ct)$$

すなわち

$$E_y = cB_0 \sin(x - ct) \equiv E_0 \sin(x - ct)$$

である。従って電場 E_y と磁束密度 B_z の振幅比は $c : 1$ となる ($E_0 = cB_0$)。また電場 E_y と磁場 H_z の比は $\sqrt{\mu_0} : \sqrt{\epsilon_0}$ となる。

(e) 平面波のより一般的な導出

自由空間でのマクスウェル方程式系から電場 $\boldsymbol{B}$ を消去する。ファラデーの法則の式の回転をとると

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}) = 0$$

第一項に関して

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$$

であるが、自由空間で $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ なので、$\nabla^2 \boldsymbol{E}$ だけが残る。一方第二項の $\nabla \times \boldsymbol{B}$ を自由空間でのアンペール・マクスウェルの法則の式を用いて変位電流で置き換えると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

となる。これらを組み合わせると結局

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = 0$$

となる。同様に磁場についても

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = 0$$

となる。$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ が x と t だけの関数とすると既に述べた x 方向に伝搬する一次元の波動方程式になる。

(f) 球面波

発生源から三次元的に外側に向かって広がる球面波に関する波動方程式を求める。原点からの距離を x であらわすと、$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。球座標での ∇^2 は

$$\nabla^2\phi(r) = \phi''(r) + \frac{2}{r}\phi'(r)$$

となるが、これは

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\phi)$$

とも書ける。すると波動方程式は

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = 0$$

と書けるが、これらに r をかけると

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\phi) = 0$$

となり $r\phi$ というかたまりに関する限り、既に述べた一次元の波動方程式と同じになる。すなわち解は

$$r\phi(r, t) = f(r - ct) \qquad \phi = \frac{f(r - ct)}{r}$$

つまり外側に向かって、距離の逆数に比例して振幅が小さくなりながら伝搬する波となる。振幅の減少はエネルギー保存のためである。すなわち波面の総面積が r^2 に比例して大きくなるため、単位面積あたりの波のエネルギーも $1/r^2$ に比例して減少すべきである。波動のエネルギーは振幅の二乗に比例するために振幅が $1/r$ に比例して減少すればこれが満たされるのである。

(g) 電磁波のエネルギーとポインティングベクトル

真空中に電場 E と磁場 H があるとき、そのエネルギー密度 u は

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2$$

である。 電磁波における電場と磁場の振幅比によると $\sqrt{\mu_0}H = \sqrt{\epsilon_0}E$ であるから、エネルギー密度の式にある二つの項の大きさは等しくなり、エネルギー密度は $\epsilon_0 E^2$ である。電磁波の進行方向へ単位面積を単位時間に通過するエネルギー S は $S = \epsilon_0 E^2 \times c$ となる。

$$S = \epsilon_0 E^2 \times c = \epsilon_0 E^2 \times \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 = E \cdot H$$

方向も考慮すると、次の式で表されるポインティングベクトル

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \qquad \text{又は} \qquad \boldsymbol{S} = \epsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

がエネルギーの流れを表す。電磁波ではその方向は伝搬の方向に一致する。コンデンサーでは外側からコンデンサー内部に向かう。