

惑星大気構造学
地球惑星大気物理学入門

倉本 圭

2013年7月
(改訂2018年5月)

0. はじめに

0-1 本講義の目的

対象 地球および惑星の大気

目的 地球と系外惑星を含む惑星の大気の物理状態と構造を支配している基本的な物理素過程について学び、構成物質・エネルギー収支を司る諸過程・静水圧（重力）平衡・分子運動論などの観点から理解する。また大気の起源と進化について、物質循環とエネルギー収支の観点から理解する。

目標 支配法則をもとに、現実の地球惑星大気の構造や現象を定量的に考察できるようになる。また、大気の起源と進化について、その理解の根拠や仮定を考察できるようになる。

関連する物質圏・天体 固体圏，太陽，衛星，惑星間空間，原始太陽系星雲…

0-2 講義内容

- 1) 惑星のサイズ、タイプ、元素存在度、分化
- 2) 惑星大気の組成、表面温度、安定性
- 3) 惑星大気の構成物質とその状態
- 4) 静水圧平衡とスケールハイト
- 5) 放射過程と放射平衡
- 6) 大気成分の相変化と鉛直構造
- 7) 惑星大気の散逸過程
- 8) 惑星大気の起源
- 9) 太陽進化と地球惑星大気の進化

1 序論

1-1 惑星とは

- 1) 恒星の周りを公転
- 2) 自ら輝いていない
- 3) 中心星より平均組成が重元素に富む
- 4) そこそこ大きい

宇宙元素存在度 太陽大気の組成. 近似的に現在の宇宙全体の組成を表す.

宇宙元素存在度 (抜粋)	
元素	存在度 (個数比)
H	2.79×10^{10}
He	2.72×10^9
C	1.01×10^7
N	3.13×10^6
O	2.38×10^7
Ne	3.44×10^6
Mg	1.076×10^6
Si	$\equiv 1 \times 10^6$
S	5.15×10^5
Ar	1.01×10^5
Fe	9.00×10^5

重元素はヘリウムより原子番号の大きな元素をいう. 惑星には固体になりやすい重元素 (O,Mg,Si,Fe,...) が多い.

2006年 IAU 決議 太陽系惑星の定義¹

- 1) 太陽を周回する天体である
- 2) 自己重力が固体強度を上まわって球形になっている
- 3) (重力で) 自分の軌道の近傍の他天体を掃きちらしている

¹この定義は太陽系内に限る. いま見つかっている系外惑星はいずれもかなり重い (質量は地球の10倍以上) ので定義をあまり気にせずに惑星と呼ばれている.

1-2 太陽系内の惑星

地球型 岩石と金属が主成分…水星・金星・地球・火星

太陽系の内側に位置. 質量小. 衛星を持たない or 持っても小数.

木星型 ガスが主成分…木星・土星

外側に位置. 質量大. H, He に富む外層. 多数の衛星.

木星・土星: 内部まで H, He に富む.

天王星・海王星: 内部は H_2O , CH_4 , NH_3 に富む (→天王星・海王星型)

冥王星 軌道いびつ. 質量小. 惑星と小惑星の中間的存在.

大気・衛星を持つ. 惑星から準惑星に降格 (2006 年).

地球の全体構造 中心部に重元素が沈んでいる.

地球の構造

(半径 km)	主要成分	状態	化学結合の主形態
内核 (1221.5)	Fe	固体	金属結合
外核 (3480.0)	Fe	液体	金属結合
マントル (6350)	Mg,Si,O	固体	イオン結合
地殻 (6371)	Si,Al,Ca,O	固体	イオン結合
海洋 (6371)	H,O	液体	水素結合
大気 (>6371)	N,O	気体	共有結合

第 1 章の問題

1-1 惑星を作る以下の各原子の半径を, それぞれ指定した方法を用いて推定せよ. 必要な定数などは適当に導入し, Å 単位で具体的な数値を出すこと. いずれもだいたい 1 Å オーダーの数字が得られるはず.

1) 水素, ボーアの原子モデルで基底状態の電子軌道半径を求める.

2) 酸素, H_2O 分子の体積のほとんどは酸素原子が占めているとし, 水の密度 (1g/cc) をもとに H_2O 分子の半径を求める. 簡単のため水分子は球形とし, 水には H_2O 分子が最密充填されているものとする.

3) 鉄, 固体鉄 (約 8 g/cc) の密度をもとに鉄原子の半径を求める.

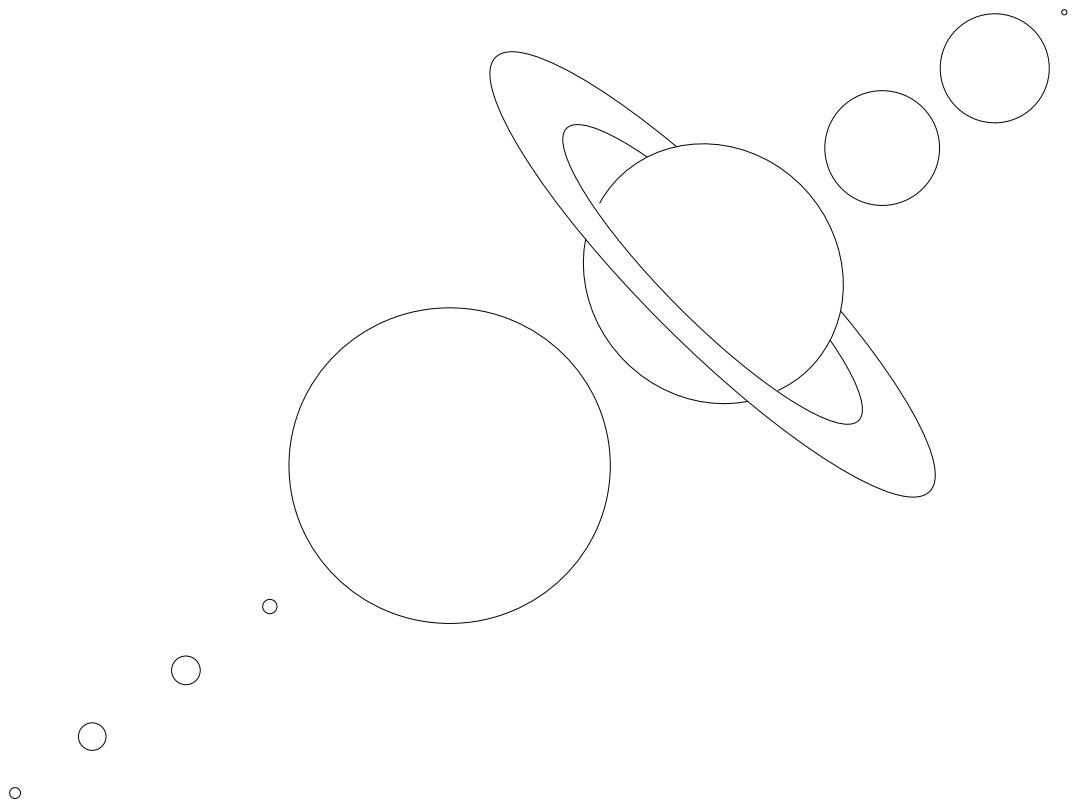
1-2 上記の結果を用いて木星 (または太陽) と地球の密度を大まかに説明せよ. 木星や太陽においては水素原子が充填されており, 地球のマントルでは酸素原子 (正確には O^{2-} イオンだが, 上記の設問で求めた値はこれに近い) が充填されていてその隙間に珪素とマグネシウムが Si^{4+} イオンと Mg^{2+} イオンの形ではまり込んでいるとし, 核には鉄原子が充填されているものとせよ. 地球マントルの Mg と Si と O の比率は 2:1:4 とし, 他の元素は無視する.

太陽系の惑星

天体名	軌道長半径 (a)	公転周期	自転周期	赤道傾斜角
水星	0.3871 AU	88.0 day	58.65 day	<28°
金星	0.7233	224.7	243.01	177°.3
地球	1.0000	365.26 day	23 ^h 56 ^m 4 ^s	23°.44
火星	1.5237	687	24 ^h 37 ^m 23 ^s	25°.19
木星	5.2026	11.862 yr	9 ^h 50 ^m 30 ^s	3°.1
土星	9.5549	29.458	10 ^h 14 ^m	26°.7
天王星	19.2184	84.022	17 ^h 17 ^m	97°.9
海王星	30.1104	164.774	18 ^h 20 ^m	29°.6
冥王星	39.5399	248.534	6 ^h 9 ^m	118°

太陽, 惑星, 月の性質

天体名	質量 (M)	赤道半径 (R)	平均密度 (ρ)	表面重力 (g)	脱出速度 (v_e)
太陽	332946	696000 km	1.41 g/cm ³	28.01	617.5 km/s
水星	0.055	2439	5.43	0.38	4.25
金星	0.815	6052	5.24	0.91	10.36
地球	≡1	6378	5.52	≡1	11.18
火星	0.107	3397	3.93	0.38	5.02
木星	317.832	71398	1.33	2.37	59.57
土星	95.16	60000	0.70	0.95	35.36
天王星	14.50	25400	1.30	0.89	21.33
海王星	17.22	24300	1.76	1.19	23.77
冥王星	0.0021	1137	2.1	0.067	0.58
月	0.0123	1738	3.34	0.17	2.38



2. 惑星大気

2-1 組成

木星型惑星：元素組成～太陽大気。HはH₂分子として存在。極めて厚い。

地球型惑星：元素組成≠太陽大気。重元素に富む。

金星・火星：CO₂が主成分。金星は厚く、火星は薄い。

地球：N₂，O₂が主成分。地表に大量の液体のH₂O。

2-2 温度

ステファンボルツマンの法則

温度 T の黒体が単位時間単位表面積あたりに放射するエネルギー = σT^4

ここで σ はステファンボルツマン定数

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

平衡温度 T_{eq} 惑星の吸収した太陽放射に等価な黒体温度

$$4\pi R^2 \sigma T_{eq}^4 = \pi R^2 (1 - A) F$$

ここで、 R は惑星半径、 A はアルベド、 F は惑星軌道における太陽放射フラックス。1AUでは

$$F = 1370 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

この値を太陽定数と呼ぶ。

有効温度 T_{eff} 惑星の総熱放射に等価な黒体温度

$$4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 = [\text{惑星の総熱放射}]$$

金星： $T_s \gg T_{eq}, T_{eff}$ CO₂の強い温室効果。

木星： $T_{eff} > T_{eq}$ 内部にも熱源。

地球： $T_s > T_{eq}, T_{eff}$ H₂O, CO₂の温室効果。

太陽と代表的な惑星の大気 (National Space Science Center, NASA, USA)

	太陽	地球	金星	火星	木星
表面気圧 $P(\text{bar})$	0.13 (光球面)	1.013	92	0.004~0.0087	-
表面温度 $T_s(\text{K})$	6430 (光球面)	288	737	210	165 (at 1bar)
平衡温度 $T_{eq}(\text{K})$	—	254.3	231.7	210.1	110
有効温度 $T_{eff}(\text{K})$	5780	254.3	231.7	210	124
主要大気成分 (vol%)	H (91.0) He (8.9) O(78ppm)	N ₂ (78.08) O ₂ (20.95) Ar (0.93)	CO ₂ (96.5) N ₂ (3.5) SO ₂ (150 ppm)	CO ₂ (95.32) N ₂ (2.7) Ar (1.6)	H ₂ (90) He (10) CH ₄ (0.3)

2-3 惑星に大気が存在するための条件

直観的に…小さな惑星は大気を持ってない

大気が存在する必要条件：分子の熱運動エネルギー < 重力エネルギー

$$\frac{3}{2}kT < G\frac{Mm}{R}$$

ここで k はボルツマン定数, G は万有引力定数, M は惑星質量, m は分子質量.

$$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K.}$$

これを脱出速度 v_e を用いて変形

$$\frac{1}{2}v_e^2 = G\frac{M}{R}$$

だから

$$\frac{3}{2}kT < \frac{1}{2}mv_e^2$$

第2章の問題

- 2-1 太陽定数, 太陽の半径, 太陽-地球間の距離から, 太陽の有効温度を求めよ.
- 2-2 アルベドがゼロのときの地球の平衡温度を求めよ. なお実際の地球のアルベドは 0.3 で平衡温度は 254 K である.
- 2-3 地球は大気を持つ条件を満たしていることを確かめよ.
- 2-4 月が大気を持つ条件を満たしているかどうか調べ, 月に大気が存在しない理由について考察せよ.

3. 構成物質とその状態

3-1 流体圏の構成物質

地球の全体構造 中心部に重元素が沈んでいる。

(半径 km)	主要成分	状態	化学結合の主形態
内核 (1221.5)	Fe	固体	金属結合
外核 (3480.0)	Fe	液体	金属結合
マントル (6350)	Mg, Si, O	固体	イオン結合
地殻 (6371)	Si, Al, Ca, O	固体	イオン結合
海洋 (6371)	H, O	液体	水素結合
大気 (>6371)	N, O	気体	共有結合

大気圏 上空へゆくにつれて

分子→原子→イオン+電子

へと変化

解離エネルギー 水素原子のイオン化ポテンシャル = 13.6 eV

エネルギーの換算 $1\text{eV}=1.602\times 10^{-19}\text{J}=1.727\times 10^4\text{K}$

3-2 熱力学平衡の仮定

熱平衡状態 孤立系において十分長時間経過したのちに実現される状態→平均量で記述 P, T, \dots

局所熱力学平衡 現実の系：物質的にもエネルギー的にも開放系。しかも不均一。

部分部分を熱平衡状態と近似：これを局所熱力学平衡の仮定という。

近似の良さ→速度論。

地球惑星物質の状態を知るには 平衡状態の物理：

プラズマ (電離気体)

↓ ↑

原子

↓ ↑

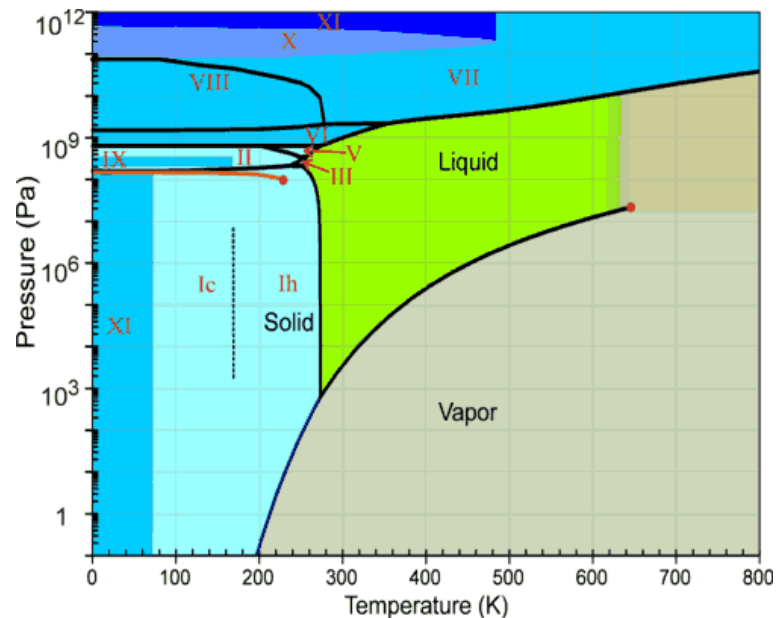
分子

↓ ↑

凝縮相 (液体・固体)

以下では分子と凝縮相の間の変化を取り上げて考察.

相図 物質が各温度圧力における熱平衡状態においてとる相を図に表したもの. 以下にあげるのはH₂Oの相図.



- 相境界：文字通り相と相の境界
- 共存曲線，相平衡曲線：2相が共存している相境界を表す曲線
- 蒸気圧曲線：液相または固相と気相との共存曲線
- 3重点：3つの相が共存する点
- 臨界点：それ以上の温度圧力下では気相と液相間の区別がつかなくなる点

3-3 気液平衡

蒸気圧平衡 気液，固気平衡. これは地球においては水と水蒸気の相互変化の記述の基礎.

n モルの物質Aからなる系を考える. Aは気相(g)または液相(l), ないしは両相の共存状態を取るものとする.

P, T が与えられた閉じた系の平衡条件は, ギブス自由エネルギー最小の条件から求まる.

$$G(P, T, n_g, n_l) = \min. \quad (3.1)$$

n_g, n_l は気相, 液相のモル数を表す. ここで

$$\begin{aligned} G &= n_g \mu_g(P, T) + n_l \mu_l(P, T) \\ &= (n - n_l) \mu_g(P, T) + n_l \mu_l(P, T) \\ &= n \mu_g(P, T) - n_l \{ \mu_g(P, T) - \mu_l(P, T) \} \end{aligned}$$

したがって G 最小の条件は

$$\begin{aligned} \text{全て気相 } (n_g = n, n_l = 0) & \quad \mu_g < \mu_l \text{ の } P, T \text{ 条件の場合} \\ \text{全て液相 } (n_g = 0, n_l = n) & \quad \mu_g > \mu_l \text{ の場合} \\ \text{気液共存} & \quad \mu_g = \mu_l \text{ の場合} \end{aligned}$$

ちなみに

$$G \equiv U + PV - TS, \quad \mu_i \equiv u + Pv - Ts$$

であるので (TS の部分をエントロピー項と呼ぶ)

- 温度が高い場合, エントロピーのより大きな相のほうが相対的により小さな化学ポテンシャルを持ち安定に存在.
- 圧力が高い場合, 部分モル体積のより小さな相のほうが安定.

蒸気圧曲線 蒸気圧曲線は共存条件

$$\mu_g = \mu_l \quad (3.2)$$

を満たす P, T として記述される.

このままでは少々不便. 共存式 (3.2) を満たす曲線の傾きを計算.

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial P} \delta P + \frac{\partial \mu_g}{\partial T} \delta T = \frac{\partial \mu_l}{\partial P} \delta P + \frac{\partial \mu_l}{\partial T} \delta T \quad (3.3)$$

一般的な関係式 $\frac{\partial \mu}{\partial P} = v, \frac{\partial \mu}{\partial T} = -s$ から

$$v_g \delta P - s_g \delta T = v_l \delta P - s_l \delta T$$

整理して

$$\left. \frac{dP}{dT} \right|_{eq} = \frac{\Delta s}{\Delta v} \quad (3.4)$$

$T \Delta s = \Delta h$ から

$$\left. \frac{dP}{dT} \right|_{eq} = \frac{\Delta h}{T \Delta v} \quad (3.5)$$

これをクラウジウス-クラペイロンの式という.

凝縮相の体積が無視でき, 気相が理想気体の法則に従うときには $\Delta v \approx v_g = RT/P$ から

$$\left. \frac{dP}{dT} \right|_{eq} = \frac{\Delta h}{RT^2} P \quad (3.6)$$

これを蒸気圧方程式と言う. ここで Δh は蒸発の潜熱 (気化熱) である.

3-4 解離平衡

以下では電離，分子解離を記述．これは惑星下層大気がなぜ主として分子からなるのか理解するための基礎．

質量作用の法則 (解離度の圧力依存性) 分子 AB とそれらが分解して生じた原子 A および原子 B の混合物からなる系を考える．AB, A, B はいずれも理想気体の法則に従うものとする．



ギブス自由エネルギー最小の条件は

$$G(P, T, n_{AB}, n_A, n_B) = \min. \quad (3.7)$$

反応座標 ξ を導入．AB が n mol A+B に変化したら $\xi = n$ と定義． G 最小の条件から平衡状態では

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = 0 \quad (3.8)$$

が成立．ここで $\frac{\partial n_{AB}}{\partial \xi} = -1, \frac{\partial n_A}{\partial \xi} = 1, \frac{\partial n_B}{\partial \xi} = 1$ なので (3.9) は

$$-\frac{\partial G}{\partial n_{AB}} + \frac{\partial G}{\partial n_A} + \frac{\partial G}{\partial n_B} = 0 \quad (3.10)$$

ゆえに

$$-\mu_{AB} + \mu_A + \mu_B = 0 \quad (3.11)$$

理想気体の場合，化学ポテンシャルは $\mu_i = \mu_i^\circ(P_0, T) + RT \ln(P_i/P_0)$ と記述されるので

$$\begin{aligned} \frac{P_A P_B}{P_{AB}} &= P_0 \exp\left(\frac{\mu_{AB}^\circ - \mu_A^\circ - \mu_B^\circ}{RT}\right) \\ &= K(T) \end{aligned} \quad (3.11)$$

右辺は T のみの関数．平衡定数と呼ばれる．

解離度 x を $P_A : P_{AB} = x : 1 - x$ と定義すると (3.5) 式は全圧 $P = P_{AB} + P_A + P_B$ を用いて

$$\frac{x^2}{1 - x^2} P = K(T) \quad (3.12)$$

T 一定の場合， P が増せ (減れ) ば解離度は減少 (増加) することが分かる．

第 3 章の問題

3-1 Δh を一定として (3.6) 式を T について積分しなさい．このとき積分の初期値を $T = T_0, P = P_0$ とせよ．

3-2 100°C での水の蒸気圧は 1 気圧である． 100°C における水の気化熱を 2260 J g^{-1} として 0°C から 350°C までの蒸気圧曲線のグラフを描きなさい．またそれを実際の値と比較しなさい．

4. 静水圧平衡とスケールハイト

4-1 基礎事項と方程式

圧力 単位面積あたりに働く力. 単位 $\text{Pa}=\text{N}/\text{m}^2=\text{J}/\text{m}^3$. 単位体積当たりのエネルギーという解釈も可

(c.f. ベルヌーイの定理: 一様完全流体・定常流・外力は保存力の場合, 流線に沿って $\frac{1}{2}\rho v^2 + P + \phi = \text{const}$).

鉛直方向 重力加速度と平行な方向. 重力加速度と同じ向きを鉛直下向き, 反対向きを鉛直上向きという.

器に張った流体: 静止状態では表面は鉛直方向と直交. 水平方向.

密度一定の静止流体層 密度 ρ , 深さ d , 重力加速度 g . 底の圧力 P は

$$P = \rho g d \quad (4.1)$$

流体層の底に限らず, 任意の深さでの圧力がこれで表現できる. 静水圧平衡の積分表現.

流体表面が鉛直方向に垂直でない場合, 水平方向に圧力の強弱. 流れが生じる. 惑星の流体圏での力の釣合いは静水圧平衡がもっとも大きく寄与. 流れを作る力はこれに比べて小さい.

微分形 密度・重力: 一般に変数

座標 z : 鉛直上向き,

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (4.2)$$

これを静水圧平衡の式と言う. ガス惑星や星の内部まで含めて表したいときには座標 z を中心からの距離 r に置換えて表現.

4-2 等温平行平板大気

簡単だが大気の構造を解析するために有効なモデル

- 状態方程式が理想気体のそれに従う (常温付近では数十気圧以下で良い近似)
- 等温等組成
- 惑星半径に比べて厚みが薄い (平行平板の仮定)
- 自己重力無視 (大気中の重力加速度一様)

状態方程式

$$PV = NRT \quad (4.3)$$

ここで N はモル数.

使いやすく変形. 1 mol あたりの気体の質量を μ とすると $N = V\rho/\mu$ であるから,

$$P = \frac{\rho}{\mu}RT \quad (4.4)$$

静水圧平衡解 状態方程式 (4.4) を使い静水圧平衡の式 (4.2) から密度を消去.

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\mu g}{RT}P \quad (4.5)$$

重力一定としてこれを解く (境界条件 $P = P_0$ at $z = z_0$)

$$P = P_0 \exp\left[\frac{-\mu g(z - z_0)}{RT}\right] \quad (4.6)$$

ここで

$$H = \frac{RT}{\mu g} \quad (4.7)$$

とすると平衡解は

$$P = P_0 \exp\left[\frac{-(z - z_0)}{H}\right] \quad (4.8)$$

スケールハイト (4.7) 式の H をスケールハイトという. 圧力が $1/e$ に減少する高度を表す. 大気の厚みを表す尺度.

(4.7) 式を変形すると

$$mgH = kT \quad (4.8)$$

ここで m は分子 1 個の質量. $R = N_A k$, $\mu = N_A m$ (N_A はアボガドロ数) に注意. スケールハイトの分子運動論的解釈: (4.8) から分子の熱的な並進運動のエネルギーと位置エネルギーとがほぼ等しくなる高さとして解釈できる.

また温度・分子量・重力加速度が一定でない場合

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dz} = -\frac{1}{H(z)} \quad (4.9)$$

$$H(z) = \frac{RT(z)}{\mu(z)g(z)} \quad (4.10)$$

が成立. 各高度での H の値を局所スケールハイトという.

4-3 外気圏

(4.6) 式では $z \rightarrow \infty$ でないかぎり $P \neq 0$. しかし P の極めて小さな希薄状態は流体とはみなせない.

気体が流体とみなせる条件 平均自由行程 \ll 系の特徴的な長さの尺度

平均自由行程: 気体分子が他の分子に衝突するまで自由に並進する平均距離 l で表すと近似的に

$$n\sigma l = 1 \quad (4.11)$$

から計算. ここで n は気体数密度, σ は分子の衝突断面積.

$$l = H \quad (4.12)$$

となる高度レベルを惑星の外気圏界面と呼ぶ. これより外側を外気圏 (または外圏) と呼ぶ. より内側がいわゆる大気圏に相当.

4-4 大気の安定性

熱的散逸 大気分子の熱運動

- 気塊中の分子の大部分が脱出可能な熱運動エネルギーを持つ場合: 流体力学的散逸

$$\frac{kTr}{2GMm} = \frac{v_T^2}{v_{esc}^2} > 1$$
$$v_T = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$$

ここで m は分子 1 個の質量.

- 大部分は脱出可能な熱運動エネルギーを持たない場合: ジーンズエスケープ

ジーンズエスケープ 外気圏界面に存在する気体分子のうち, 脱出速度を越える並進速度を持つ成分が散逸. 分子の速度分布はマックスウェルの速度分布則. このとき散逸フラックス (外気圏界面単位表面積, 単位時間あたりに宇宙空間に失われる分子数) ϕ_{esc} は

$$\phi_{esc} = \int_{|v| \geq v_{esc}, v_z \geq 0} v_z f(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} \quad (4.13)$$

から計算. f はマックスウェルの分布関数

$$f(\mathbf{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right] \quad (4.14)$$

計算を実行すると

$$\phi_{esc} = n \frac{v_T}{2\pi^{1/2}} (1 + \lambda) e^{-\lambda} \quad (4.15)$$

ただし

$$\lambda = \frac{mv_{esc}^2}{2kT} = \frac{v_{esc}^2}{v_T^2}$$

λ を散逸パラメータと呼ぶ。

第4章の問題

- 4-1 気温が a) 高度によらずに一定の場合と, b) 高度 1 km あたり 10 K 減少する場合のそれぞれについて, 気圧が 500 hPa となる高度を求めよ。ただし地表面圧力は 1000 hPa, 地表面気温は 300 K, 大気のアボガドロ数は 30 g mol^{-1} , 重力加速度は 10 m s^{-2} とする。
- 4-2 非圧縮流体からなる半径 R の天体内部での圧力分布を考える。簡単のため自転や流体の運動の影響は無視できるものとする。
- (1) 密度が一様な場合について, 惑星中心からの距離 $r (< R)$ の位置における重力加速度を密度 ρ と r を用いて表しなさい。必要な物理定数等は適宜導入して構わない。
 - (2)(1) の場合について静水圧平衡の式を書き下し, それを解いて天体内部の圧力を r の関数として求めなさい。ただし表面 ($r = R$) における圧力は 0 とする。
 - (3) この惑星が平均密度を保ったまま密度 ρ_c の核と密度 ρ_m のマントルに分化したとする ($\rho_c > \rho > \rho_m$)。このとき中心圧力は分化前と比べて増加するか減少するか調べよ。
- 4-3 外気圏に関する以下の問いに答えなさい。
- (1) (4.15) 式を導け (ヒント: 円筒座標を導入。積分範囲に注意)。
 - (2) 問題 1. の大気 a) の場合について外気圏界面の高度を求めよ。分子の衝突断面積を $\sigma = 1 \times 10^{-19} \text{ m}^2$ とする。

5. 熱輸送過程としての放射

5-1 熱輸送の素過程

エネルギーフラックス 微小面積 dA を微小時間 dt の間に通過するエネルギーが

$$FdAdt$$

と表わされるとき、 F をエネルギーフラックス (エネルギー流束) という。

「単位面積を単位時間あたりに通過するエネルギー量」とも言える。

熱の輸送機構 伝導・対流 (または移流)・放射に大別できる

伝導 粒子の熱運動による。

$$F_{cond} = -k \frac{dT}{dl} \quad (5.1)$$

F_{cond} : 座標軸 l に直交する単位断面積を単位時間あたりに通過する熱量。

k : 熱伝導率 単位 $\text{J K}^{-1} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$ 。熱の伝わりやすさを表す。

気体の場合には密度, 比熱, 熱運動速度, 平均自由行程を使って

$$k \approx \frac{1}{3} \rho c_p v_T l. \quad (5.2)$$

これを ρc_p で割った量が熱拡散係数 (κ)。熱拡散係数は「温度の伝わりやすさ」を表す。

対流圏ではほとんど効かない。希薄な上層大気 (熱圏) では重要。

対流 流体塊の移動による。移流とも言う。

熱圏より下部で重要。流れのスケールや熱の運び方に応じてさらに細分される。

放射 光 (電磁波) を介在。

流体圏のほとんどあらゆる領域で重要。太陽, 宇宙空間とのエネルギー授受の主役。

5-2 熱的な電磁波

物質と光の相互作用 光を時間変化する電場として考える。

吸収 : 電場が物質の電荷を運動させ, 物質の内部エネルギーが増す。

放出 : 電荷の運動によって時間変化する電場が生じる。

自発放出：周囲の光の存在に関係なく放出

誘導放出：光に刺激されて放出

黒体 あらゆる振動数の光を吸収放出できる理想物質。0 K で真黒。

黒体壁 ($T > 0$) で囲まれた空洞内の熱平衡状態：放出吸収が釣り合う。この状態にある光が黒体放射 (黒体輻射)。様々な振動数と伝播方向をもった電磁波 (モード) の重ね合わせ。

黒体放射のエネルギー密度 振動数 $\nu \sim \nu + d\nu$ を持つ光の単位体積あたりのエネルギー = 単位体積あたりの独立したモードの個数 \times 1 モードあたりの平均エネルギー

モードの個数 空洞を一辺 L の立方体とする。壁面では光は完全吸収。定在波として存在できる電場は正整数 n_x, n_y, n_z を使い

$$\sin\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right)e^{i2\pi\nu t}. \quad (5.3)$$

n_x, n_y, n_z の 1 つの組が 2 つの独立モード (電場の偏りの独立方向が 2 つ) を表す。

$$\nu = \frac{c}{2L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (5.4)$$

ここで c は光の速さ。

範囲 $\nu \sim \nu + d\nu$ を (n_x, n_y, n_z) 空間の範囲に焼き直す

$$2L\nu/c \leq \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \leq 2L(\nu + d\nu)/c. \quad (5.5)$$

これは (n_x, n_y, n_z) 空間における半径 $2L\nu/c$ 、厚さ $2Ld\nu/c$ の 1/8 球殻を表す。この球殻内の整数組の個数はこの球殻体積に等しく、 $4\pi L^3 \nu^2 d\nu/c^3$ 。この倍が一辺 L の立方体内の独立モード数。単位体積あたりでは

$$8\pi\nu^2 d\nu/c^3. \quad (5.6)$$

1 振動子の平均エネルギー 振動数 ν の独立した 1 モードのとりうるエネルギー $0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots, nh\nu, \dots$ (光の量子性)。ここで h はプランク定数 ($h = 6.62607004 \times 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$) である。統計力学の基本法則から、エネルギー $nh\nu$ にある確率は

$$\propto \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)$$

よってエネルギーの平均値 $\langle \varepsilon_\nu \rangle$ は

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)}. \quad (5.7)$$

計算を実行すると

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (5.8)$$

従って振動数 $\nu \sim \nu + d\nu$ を持つ光の単位体積当たりのエネルギーは

$$U(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu. \quad (5.9)$$

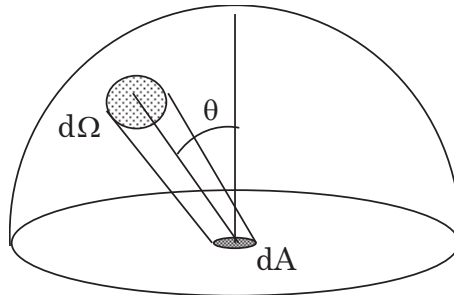
これをプランクの輻射式という。

5-3 放射伝達の方程式

放射強度 面積 dA を立体角要素 $d\Omega$ の方向に時間 dt に通過する振動数 $\nu \sim \nu + d\nu$ の電磁波のエネルギーを

$$I_\nu \cos \theta dA d\Omega dt d\nu \quad (5.10)$$

と表す。ここで θ は dA の法線方向と立体角要素のなす角。単位は $\text{J m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} = \text{J m}^{-2} \text{sr}^{-1}$ 。 I_ν を放射強度 (radiation intensity) という。



dA を通過する全放射エネルギーフラックスは

$$F = \int \int I_\nu \cos \theta d\Omega d\nu = \int F_\nu d\nu \quad (5.11)$$

ここで $F_\nu = \int I \cos \theta d\Omega$ は単位振動数当たりの放射エネルギーフラックス。

エネルギー密度との関係 単位振動数，単位体積あたりに立体角 $d\Omega$ の方向に進んでいる電磁波のエネルギー密度を u_ν とする。このとき断面積 dA ，長さ cdt の円筒内部のエネルギーは

$$u_\nu dA c dt. \quad (5.12)$$

この光は dt の間に dA を通過するから

$$I_\nu dt dA = u_\nu dA c dt. \quad (5.13)$$

よって

$$I_\nu = u_\nu c \quad (5.14)$$

黒体放射の場合， u_ν の全立体角積分はプランクの輻射式に等しい．このとき放射は等方的なので $\int I_\nu d\Omega = 4\pi I_\nu$ 従って

$$I_\nu = \frac{c}{4\pi} U(\nu, T) \quad (5.15)$$

この時の I_ν を以後 $B_\nu(T)$ と記す

$$B_\nu(T) = \frac{2}{c^2} \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (5.16)$$

これをプランク関数という．

放射伝達 物質中を伝播する電磁波は吸収によって減衰したり，放出によって強くなったりする．

密度 ρ の物質中を微小距離 ds 通過したときの放射強度の変化を dI_ν とすると

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds + \rho j_\nu ds \quad (5.17)$$

κ_ν を質量吸収係数， j_ν を放出係数と呼ぶ．共に ν の関数．これを放射伝達方程式と言う (ここでは簡単のため散乱を無視)．

キルヒホッフの法則 局所熱平衡が成立している時には

$$j_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T) \quad (5.18)$$

が成立．つまり電磁波を吸収しやすい物質は，同時に光を放出しやすい．

導出：物質系が一様温度 T の熱平衡状態にあるとする．このとき放射強度は至るところでプランク関数に等しい．そのため任意の光路について

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds + \rho j_\nu ds = 0 \quad (5.19)$$

さらに $I_\nu = B_\nu(T)$ を用いてキルヒホッフの法則 (5.18) を得る．

局所熱平衡の仮定は考えている放射場の等価温度と物質の温度が近く，十分高い頻度で分子間，分子-光子間衝突が生じているときに良い近似．地球では高度約 100km 以下，赤外放射の波長域において成立っている．

第5章の問題

5-1 プランク関数からステファン-ボルツマンの法則を導きなさい。積分公式 $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x-1} dx = \frac{\pi^4}{15}$ を用いてよい。

5-2 放射強度を振動数の代わりに波長を用いて表現することもよくおこなわれる。すなわち面積 dA を立体角要素 $d\Omega$ の方向に時間 dt に通過する波長 $\lambda \sim \lambda + d\lambda$ の光のエネルギーを

$$I_{\lambda} \cos \theta dA d\Omega dt d\lambda \quad (5.20)$$

と表現する。黒体放射の場合には

$$I_{\lambda} = B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1 \right]}. \quad (5.21)$$

と表されることを示しなさい。

5-3 温度 T を固定したときに、波長で表したプランク関数 (5.21) の最大値を与える波長は近似的に $3000/T(\text{K}) \mu\text{m}$ で表されることを示しなさい。

5-4 $T = 250 \text{ K}$ および 6000 K の場合について、波長で表したプランク関数の波長依存性を表すグラフを描きなさい。ただし関数値はそれぞれの温度における最大値で規格化したものをプロットしなさい。

6. 放射平衡

6-1 エネルギー平衡

部分系のエネルギー変化 エネルギー流入量と流出量の差が部分系 (体積 V , 表面積 A) のエネルギー変化.

$$\frac{d}{dt} \int_V e dV = - \int_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \quad (6.1)$$

e は単位体積当たりのエネルギー, \mathbf{F} はエネルギーフラックス.

$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} > 0$ のとき流出, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} < 0$ のとき流入.

エネルギー平衡の状態 流入量と流出量が一致した定常状態

c.f. 地球の大気と海洋は大局的にはエネルギー平衡の状態にある.

放射平衡 エネルギー輸送のメカニズムが放射過程のみの場合に実現されるエネルギー平衡. 大気の大気温度構造を支配.

$$F = \int_{\text{単位半球}} d\Omega \int dv \cos \theta I_\nu(\theta, \phi)$$

6-2 一次元放射平衡解

平行平板灰色大気 放射平衡にある大気の大気温度分布がどう決まるか調べるための有用なモデル. 次の仮定をおく.

- 平行平板大気 (ただし等温ではない 第4回参照)
- 局所熱力学平衡 (キルヒホッフの法則が成立)
- 惑星放射に対する吸収係数は波長に依らず一定 (灰色)
- 太陽放射に対しては透明

地面に一度吸収された熱が放射によって大気上層へどう伝達されるか調べ, 放射平衡にあるときの鉛直温度分布を求める.

基礎方程式

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds + \rho j_\nu ds \quad (6.2)$$

$$j_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T) \quad (6.3)$$

これを振動数空間で積分 $I = \int I_\nu d\nu$ とおいて

$$dI = -\kappa \rho I ds + \kappa \rho B(T) ds \quad (6.4)$$

ここで $B(T)$ はプランク関数を振動数積分したもので

$$B(T) = \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (6.5)$$

光学的深さ 大気の不透明度を以下のように表現. 鉛直上向きに z 座標をとり

$$\tau(z) = \int_z^{\infty} \rho \kappa dz. \quad (6.6)$$

これを大気上端から計った光学的深さという.

地表まで積分したものを, 大気的全光学的深さ, という.

座標の変換 放射伝達方程式 (6.4) 式を τ を用いて書き直す. 天頂角を θ とすると

$$ds = dz / \cos \theta \quad (6.7)$$

また光学的深さの定義式を微分形で表すと $d\tau = -\kappa \rho dz$ なので

$$\kappa \rho ds = -d\tau / \cos \theta \quad (6.8)$$

ゆえに (6.4) 式は

$$\cos \theta \frac{dI}{d\tau} = I - B(T) \quad (6.9)$$

2 方向近似 (6.9) 式中の I は τ と天頂角と方位角の関数. これを上向きと下向きの 2 方向に自由度を落とす.

もともと地面の熱放射が伝達される問題なので

- I は方位角にはよらない
- 上向き ($0 < \theta < \pi/2$), 下向き ($\pi/2 < \theta < \pi$) それぞれで天頂角依存性は小さい. それぞれ I_+, I_- とする.

$$F_{up} = \int_{\text{上半球}} d\Omega \cos \theta I = \pi I_+ \quad (6.10)$$

$$F_{down} = - \int_{\text{下半球}} d\Omega \cos \theta I = \pi I_- \quad (6.11)$$

とすると, $\int d\Omega (6.9) \times \cos \theta$ より

$$\frac{2}{3} \frac{dF_{up}}{d\tau} = F_{up} - \pi B \quad (6.12)$$

$$-\frac{2}{3} \frac{dF_{down}}{d\tau} = F_{down} - \pi B \quad (6.13)$$

放射平衡の条件 $\tau \sim \tau + d\tau$ の気層のエネルギーの釣合は

$$0 = [\text{流入}] - [\text{流出}] = [F_{up}(\tau + d\tau) + F_{down}(\tau)] - [F_{up}(\tau) + F_{down}(\tau + d\tau)] \quad (6.14)$$

整理して

$$F_{up}(\tau + d\tau) - F_{down}(\tau + d\tau) = F_{up}(\tau) - F_{down}(\tau) \quad (6.15)$$

したがって

$$F_{up}(\tau) - F_{down}(\tau) = \text{一定} \quad (6.16)$$

が放射平衡の条件. 大気上端 ($\tau = 0$) では $F_{down} = 0$, $F_{up} =$ 宇宙空間へ逃げる総放射エネルギーフラックス. 有効温度を用いて

$$F_{up}(\tau) - F_{down}(\tau) = \sigma T_{eff}^4$$

微分方程式を解く (6.12)+(6.13) を作ると (6.16) から左辺は消えて

$$0 = F_{up} + F_{down} - 2\pi B(T). \quad (6.17)$$

(6.12)-(6.13) を作ると

$$\frac{2}{3} \frac{d(F_{up} + F_{down})}{d\tau} = \sigma T_{eff}^4. \quad (6.18)$$

この右辺は一定値なので

$$F_{up} + F_{down} = \frac{3}{2} \sigma T_{eff}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad (6.19)$$

ここで $\tau = 0$ で $F_{up} = \sigma T_{eff}^4$, $F_{down} = 0$ の条件を用いた.

(6.17) 式から

$$\pi B(T) = \sigma T(\tau)^4 = \frac{1}{2} \sigma T_{eff}^4 \left(\frac{3}{2} \tau + 1 \right) \quad (6.20)$$

これで大気の温度分布が光学的深さの関数として解けた.

また,

$$F_{up} = \frac{1}{2} \sigma T_{eff}^4 \left(\frac{3}{2} \tau + 2 \right)$$

$$F_{down} = \frac{1}{2} \sigma T_{eff}^4 \left(\frac{3}{2} \tau \right)$$

放射平衡解の地表温度ギャップ 地表面でのエネルギーの釣合を考えると

地表の放つ上向き放射 = 太陽放射 + 大気の下向き放射

$$\sigma T_s^4 = \sigma T_{eff}^4 + F_{down}(\tau_s) \quad (6.21)$$

ここで τ_s は、光学的深さの地表における値（大気的全光学的厚さ）である。ゆえに

$$\sigma T_s^4 = \frac{1}{2} \sigma T_{eff}^4 \left(\frac{3}{2} \tau_s + 2 \right) \quad (6.22)$$

よって

$$T_s > T(\tau_s)$$

つまり放射平衡解においては地表面は直上の大気よりも高温になる。大気と地表の間で熱伝導など放射以外の過程で熱交換が起きると、最下層の大気は昇温して熱膨張し、その浮力によって熱対流が発生することが期待される。

6-3 簡単な温室効果モデル：ガラスモデル

ガラスモデル 温室効果を簡単に表すために、大気層を太陽放射(可視光)には透明で、赤外放射には不透明なガラス層で近似したモデル。

仮定 ガラスは等温、太陽放射を透過すること以外は、黒体としてふるまう。(地表の赤外放射を吸収し、自身の温度に対応した熱放射を放出)。

ガラス一層の場合 放射平衡にある場合、地表(温度 T_s) とガラス層 (T_1) の放射収支はそれぞれ次のように表せる。

$$\sigma T_s^4 = \sigma T_{eff}^4 + \sigma T_1^4 \quad (6.23)$$

$$2\sigma T_1^4 = \sigma T_s^4 \quad (6.24)$$

これを解くと、

$$T_1 = T_{eff}, T_s = 2^{1/4} T_{eff} = 1.189... T_{eff} \quad (6.24)$$

つまりガラス層からの熱放射を余計に受けとる分、地表はそれに釣り合う熱放射を出すために平衡温度よりも温度が上昇する。

ガラス n 層の場合 最上層から最下層まで $1, \dots, n$ と番号を振り、それぞれの温度を T_1, \dots, T_n とする。第 $k = 2 \sim n - 1$ 層の放射収支は

$$2\sigma T_k^4 = \sigma T_{k-1}^4 + \sigma T_{k+1}^4 \quad (6.25)$$

この式を次のように変形する

$$\sigma T_{k+1}^4 - \sigma T_k^4 = \sigma T_k^4 - \sigma T_{k-1}^4 \quad (6.26)$$

この式は大気層間の正味の上向き放射が、大気層によらずに一定であることを示す。平衡状態下ではこれは σT_{eff}^4 に等しくなくてはならない。

さらに $T_1 = T_{eff}$ でなければならないので,

$$\sigma T_k^4 = k\sigma T_{eff}^4 \quad (6.27)$$

となる. 地表の放射収支は

$$\sigma T_s^4 = \sigma T_{eff}^4 + \sigma T_n^4 \quad (6.28)$$

であるから, $\sigma T_n^4 = nT_{eff}^4$ を代入すると

$$\sigma T_s^4 = (n+1)\sigma T_{eff}^4, \quad T_s = (n+1)^{1/4} T_{eff} \quad (6.29)$$

灰色放射平衡解との比較 (6.22) 式の灰色大気の放射平衡解によれば

$$T_s = \left(\frac{3}{4}\tau + 1 \right)^{1/4} T_{eff}$$

であるので, $n \longleftrightarrow \frac{3}{4}\tau$ と対応づければ, 両者は同じ物理的内容を表す.

6-4 光の吸収のメカニズム

分子のエネルギー 分子のエネルギー準位差に対応する振動数の光を吸収あるいは放出する. 準位間の移動を遷移という.

$$h\nu = E_2 - E_1$$

プランク定数 $h = 6.62606957 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$.

分子のエネルギーは細かく見ると原子核の結合エネルギー (もっともこれは分子というより原子の性質), 分子間の結合エネルギー, 分子振動, 分子回転, 電子スピン, 核スピンのそれぞれのエネルギーの和になっている. 赤外放射の吸収放出には分子振動と, 分子回転のエネルギーが重要.

振動と回転のエネルギー準位 簡単のために 2 原子分子を考える. 2 分子の換算質量を μ , ばね定数を k とすれば固有振動数は

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (6.30)$$

この時に取り得る振動のエネルギー準位は

$$E_v = h\nu_0 \left(v + \frac{1}{2} \right) \quad (6.30)$$

ここで $v = 0, 1, 2, \dots$. またこの分子の重心周りの慣性能率を I と置くと, 回転のエネルギー準位は

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) \quad (6.30)$$

ここで $J = 0, 1, 2, \dots$

第6章の問題

6-1 平行平板灰色大気について以下の問いに答えなさい。

- (1) 全光学的深さが $4/3$ であるとする。このときの吸収係数の値を求めよ。ただし地表面気圧は 10^5 Pa とし、重力加速度は 10 m s^{-2} とする。
- (2) この大気を持つ惑星の有効温度が 255 K であるとき、地表面温度と地表面直上の気温を求めなさい。ただし温度分布は放射平衡によって定まるものとする。
- (3) (2) で求めた大気中で $T > 273 \text{ K}$ (液体の水が存在できる温度) となっている気圧範囲を求めなさい。

7. 対流の発生と放射対流平衡

7-1 大気対流の発生条件

対流とは ここでは浮力（密度差）によって駆動される流れのことを対流と呼ぶことにする。（文脈によって意味が違うことがあるので要注意。）

浮力の原因が温度差に起因する対流を熱対流，組成差に起因するものを組成対流と呼ぶ。地球の大気，海洋，マントル，外核では温度差と組成差の双方が影響している。

浮力振動数 大気対流は，基本的には下層の空気よりも上層の空気が「重い」場合に発生する。これは，上下の大気層が入れ替わった方がより位置エネルギー的に安定となるためである。逆に上空の空気の方がより「軽い」場合には，対流は発生しないであろう。

ただし大気の場合，一般に上空ほど圧力が低く密度も低い。一見対流は起きないように思えるが，これは誤りであり，上層と下層の空気の密度を同じ圧力条件で比較する必要がある。

もしもある高度の気塊を仮想的に少し持ち上げたとする。もし持ち上げた高度の周囲の空気よりもこの気塊の密度が高ければ，この気塊には元の位置に戻るような下向きの力が働く。この場合，逆にやや仮想的に下降させても，元の位置に戻るような上向きの力が働く。つまり微小変位を加えられた気塊は，単振動的な上下運動をすると考えられる。この場合は対流は発生しない。

他方，持ち上げた気塊のほう周囲の空気よりも密度が低ければ，この気塊には上向きの力が働くことなる。この場合，もとの位置から離れるように上昇運動を起こすことになる。この場合，気塊を下方に変位させた場合には，気塊のほう周囲の空気よりも密度が高くなり，やはりもとの位置から離れるような下降運動を起こすようになる。つまりこの場合は，対流が発生する。

δz を気塊の微小鉛直変位とすれば，気塊に働く力は微小変位に比例し，運動方程式は次のように書けるだろう。

$$\ddot{\delta z} = -N^2 \delta z \quad (7.1)$$

ここで N のことを浮力振動数と呼ぶ。 N^2 が正なら運動は単振動になり対流は発生しない。他方 N^2 が負なら，微小変位が指数関数的に成長することになり，これは対流が発生することを意味する。このように気塊 (air parcel) の仮想変位を考えて大気層の安定性を調べる方法をパーセル法という。

パーセル法による浮力振動数の導出 N は気体層の鉛直熱構造によって決まる。簡単のため上下運動に伴う相変化が無視できる場合について， N の形を導く。

まず大気の鉛直温度構造 $T(z)$ は、仮想変位を考える気塊の元の高度 $z = z_0$ の周りで線形近似する.

$$T(z) = T(z_0) + \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z_0} \delta z \quad (7.2)$$

この時、圧力と密度の高度分布は静水圧平衡が成り立っているとして

$$P(z) = P(z_0) \left(1 - \frac{\delta z}{H_0} \right). \quad (7.3)$$

ここで H_0 は $z = z_0$ における局所スケールハイトである (第4章). 以上から高度 $z = z_0 + \delta z$ における空気の密度は次のように書ける.

$$\rho_{air}(z) = \rho(z_0) \left[1 - \left(\frac{1}{H_0} + \frac{1}{T_0} \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z_0} \right) \delta z \right]. \quad (7.4)$$

さらにこの高度から気塊を δz 微小変位させたとき、この気塊は圧力は周囲の空気と同一だが、準静的に断熱変化すると仮定する. つまり温度は同高度の空気とは異なっても良いとする. 熱力学の第一法則から断熱変化の際の温度変化は

$$C_v dT = -PdV$$

に従う. ここで C_v は定積比熱である. 理想気体を仮定すると

$$\begin{aligned} C_v dT &= -d(PV) + VdP \\ &= -RdT + VdP \end{aligned}$$

となる. ここでは 1mol の分子を含む気塊を想定した. ここに静水圧の関係式から $dP = -\rho g dz$ を代入すると

$$C_v dT = -RdT + V\rho g dz,$$

$$C_p dT = \mu g dz$$

が得られる. ここから気塊を断熱的に変位させたときの温度勾配は

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\mu g}{C_p} \quad (7.5)$$

となる. この相変化を無視した温度勾配の絶対値

$$\Gamma_d = \frac{\mu g}{C_p} \quad (7.6)$$

を乾燥断熱減率と呼ぶ.

(7.4) 式の温度勾配の項に上式を代入すると断熱的に変位させた気塊の密度を得る.

$$\rho_{parcel}(\delta z) = \rho(z_0) \left[1 - \left(\frac{1}{H_0} - \frac{1}{T_0} \Gamma_d \right) \delta z \right] \quad (7.7)$$

この気塊には、単位質量あたり次の浮力が働く（上向きの力を正としている）
 $-\frac{\rho_{\text{parcel}} - \rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{parcel}}} g$. したがって気塊の運動方程式は

$$\ddot{z} = -\frac{g}{T_0} \left(\Gamma_d + \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z_0} \right) \delta z \quad (7.8)$$

したがって、浮力振動数（の2乗）は次のように、断熱温度勾配と実際の大気層の温度減率 γ の差で書けることが分かる.

$$N^2 = \frac{g}{T_0} (\Gamma_d - \Gamma) \quad (7.9)$$

ここで

$$\begin{aligned} \Gamma_d &= \frac{\mu g}{C_p} && \text{乾燥断熱減率} \\ \Gamma &= -\frac{dT}{dz} && \text{大気層の温度減率} \end{aligned}$$

したがって大気の安定条件は次のように書ける

$$\begin{aligned} \Gamma < \Gamma_d, \quad N^2 > 0, && \text{安定：元の位置に戻ろうとする} \\ \Gamma = \Gamma_d, \quad N^2 = 0, && \text{中立} \\ \Gamma > \Gamma_d, \quad N^2 < 0, && \text{不安定：与えた変位が増大し対流が発生.} \end{aligned}$$

7-2 湿潤過程

凝結を伴う対流 大気中に可凝結成分が含まれている場合には、気塊が断熱的に上昇すると、そこで凝結が発生しうる。これは実際に地球大気では積雲の発生として観察することができる。凝結が発生するとその凝結潜熱が発生する分、断熱的な温度減率は小さくなると予想される。一方で対流の発生条件という観点では、温度減率への影響に加えて、鉛直方向に気体成分が変化することの効果も生じてくる。

湿潤過程の熱力学 凝結も考慮した場合の気塊に対する熱力学の第一法則は

$$dU = -dW + dQ + dZ$$

と書ける。ここで dW は気塊が膨張して外界にする仕事、 dQ は外から加えた熱量、 dZ は凝結で解放される潜熱を表す。

これを 1mol の気塊に適用する。気塊が断熱的に高度 dz 上昇したとすると各項はそれぞれ

$$\begin{aligned} dU &= \bar{C}_v dT \\ dQ &= 0 \\ dW &= -PdV \\ &= -d(PV) + VdP \\ &= -RdT - V\rho g dz \quad (\because \text{静水圧平衡の式}) \\ &= -RdT - \bar{\mu} g dz \\ dZ &= -\sum_k \Delta h_k dX_k \end{aligned}$$

ここで \bar{C}_v と $\bar{\mu}$ は、気体の平均定積モル比熱、平均モル分子質量、 Δh_k は凝結性成分 k の 1mol 当たりの凝結潜熱、 X_k および dX_k はそのモル分率とその変化量を表す。

これらを第一法則に代入し $\bar{C}_p = \bar{C}_v + R$ (\bar{C}_p は平均定圧モル比熱) に注意して整理すると

$$\bar{C}_p dT + \bar{\mu} g dz + \sum_k \Delta h_k dX_k = 0 \quad (7.10)$$

を得る。

凝結がない場合は $dX_k = 0$ と置いて、直ちに次の乾燥断熱減率を得ることができる。

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\bar{\mu} g}{\bar{C}_p}$$

(この節では空気が複数の成分からなることを陽に考慮しているので平均が登場する)。

凝結がある場合、モル分率 X_k と分圧の関係から、

$$dX_k = d\left(\frac{P_k}{P}\right) = \frac{1}{P} dP_k - \frac{P_k}{P^2} dP$$

成り立つ。ここにクラジウス・クラペイロンの関係式

$$dP_k = \frac{P_k \Delta h_k}{RT^2} dT$$

と静水圧平衡の式を代入すると

$$\begin{aligned} dX_k &= \frac{1}{P} \frac{P_k \Delta h_k}{RT^2} dT + \frac{P_k}{P^2} \rho g dz, \\ &= \frac{X_k \Delta h_k}{RT^2} dT + \frac{\bar{\mu} g X_k}{RT} dz. \end{aligned}$$

これを (7.10) 式に代入すると湿潤断熱減率が求まる。

$$\begin{aligned} \bar{C}_p dT + \bar{\mu} g dz + \sum_k \Delta h_k dX_k &= 0 \\ \bar{C}_p dT + \bar{\mu} g dz + \sum_k \Delta h_k \left(\frac{X_k \Delta h_k}{RT^2} dT + \frac{\bar{\mu} g X_k}{RT} dz \right) &= 0 \\ \left(\bar{C}_p + \frac{\sum_k X_k \Delta h_k^2}{RT^2} \right) dT + \bar{\mu} g \left(1 + \frac{\sum_k X_k \Delta h_k}{RT} \right) dz &= 0 \\ \frac{dT}{dz} &= -\frac{\bar{\mu} g \left(1 + \frac{\sum_k X_k \Delta h_k}{RT} \right)}{\bar{C}_p \left(1 + \frac{\sum_k X_k \Delta h_k^2}{\bar{C}_p RT^2} \right)}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

凝結過程を含む断熱減率

$$\Gamma_w = \frac{\bar{\mu}g \left(1 + \frac{\sum X_k \Delta h_k}{RT}\right)}{\bar{C}_p \left(1 + \frac{\sum_k X_k \Delta h_k^2}{\bar{C}_p RT^2}\right)}$$

を湿潤断熱減率と呼ぶ.

7-3 湿潤大気の安定性

温度減率の大きさ 前節で求めた温度減率 Γ_w は、凝結物の熱量と体積の一部を無視していることから、厳密には擬湿潤断熱減率と呼ばれる。これは、凝結物は雨や雪として気塊から速やかに失われることを仮定したことに相当する。

Γ_w の表式に地球大気を想定して実際の数値を当てはめてみる。地球の平均気温 288K (15°C) における飽和水蒸気圧 P_v は $1.7 \times 10^3 \text{ Pa}$ である。したがって地表における水蒸気の実分率 x_v は $x_v = P_v/P_s = 1.7 \times 10^{-2}$ である。さらに 1mol あたりの蒸発潜熱 Δh は $4.4 \times 10^4 \text{ J/mol}$ であり、 $\Delta h/(RT) = 18.4$ なので、 $C_{pm} = \frac{7}{2}R$ に注意して

$$\Gamma_w \approx \Gamma_d \times \frac{1 + 1.7 \times 10^{-2} \cdot 18.4}{1 + 1.7 \times 10^{-2} \cdot 18.4^2/3.5} = 0.5\Gamma_d$$

したがって、擬湿潤断熱減率 Γ_w は乾燥断熱減率の約半分になることが分かる (気温に依存することに注意)。

絶対安定・条件付き不安定・絶対不安定 湿潤過程が関わる可能性がある大気の安定性は、大気が必ずしも凝結性成分に飽和しているとは限らないことを考慮し次のように分類される。

$\Gamma < \Gamma_w,$	絶対安定：仮想変位に対し気塊は必ずもとの位置に戻ろうとする
$\Gamma_{dry} > \Gamma > \Gamma_w,$	条件付き不安定：気塊が飽和していれば不安定
$\Gamma > \Gamma_d,$	絶対不安定：必ず与えた変位が増大し対流が発生。

7-4 放射対流平衡

放射平衡解の地表温度ギャップ 前章で放射平衡解は地表面温度が地表面直上の気温よりも高く、対流不安定であることを示した。模式的には図 7.1(a) の赤線のようになる。大気下層には対流が発生して、温度構造はおおむね断熱温度減率に従うようになる。

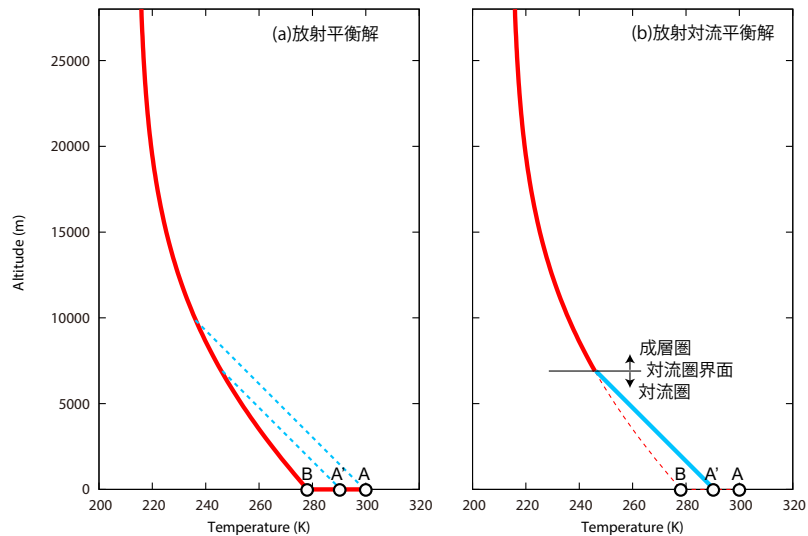


図 7.1 放射平衡解は地表面温度 (A) が地表面直上の気温 (B) より高い。地表と接した大気は熱伝導で温められ対流が発生する。大気下層は大局的には、対流で決まる温度減率を持つようになり、地表面とその直上大気の温度差はなくなる (A')。対流過程と放射過程が同時に働くことで決まる熱的平衡を、放射対流平衡という。

放射平衡解の対流不安定性は、惑星大気に対流の発生する主要な原因であり、対流によって温度構造が調整されている層を対流圏と呼び、上空の放射によって温度構造が決まっている層を成層圏と呼ぶ。

対流はどの高度まで起こるだろうか。地表面と接した気塊が断熱的に膨張すると点 A から点 C まで上昇することができる。では対流圏では AC に沿った温度構造が実現するかというと、これは全体のエネルギー収支 (太陽放射の吸収と惑星放射の放出) のつり合いを満たさない。なぜなら温度上昇した分、宇宙空間への熱放射が増大してしまうためである。熱放射が釣り合うような対流圏の温度構造は、放射平衡解よりも、一部の高度で (図の例では地表面で) 温度が低下したもの (A'C') となる。対流層 A'C' の上端では、正味上向き放射フラックスが、放射平衡解を求めた際に置いた値に等しい。

第 7 章の問題

7-1 地球大気を想定し、地表面で水蒸気に飽和した気塊が高度 10km の対流圏界面まで擬湿潤断熱過程にしたがって上昇したとする。このとき気塊の温度 T と水蒸気モル分率 x_v は高度の関数として決まる。気塊の従う方程式は、次の (A)~(C) である。

(a) 凝結性成分は微量として $x_n = 1$ と近似し, (7.11) 式を次のように置く

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\mu_n g}{C_{pn}} \frac{1 + x_v \frac{\Delta h}{RT}}{1 + x_v \frac{\Delta h^2}{RC_{pn} T^2}} \quad (A)$$

(b) 静水圧平衡の式も同様に次式で近似する.

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\mu_n g}{RT} P \quad (B)$$

なおこの (B) 式は, 温度勾配が一定の場合は解析的に積分できることに注意.

(c) 飽和水蒸気圧 $P_v(T)$ は蒸気圧方程式 (3.6) に従う.

$$\frac{dP_v}{dT} = \frac{\Delta h}{RT^2} P_v. \quad (C)$$

また各高度で $x_v = P_v/P$ を満たす. なおこの (C) 式は Δh が定数なら解析的に積分できることに注意.

重力加速度は 9.8m/s^2 , 非凝結成分の平均分子量を 30, 地表気温は 288K , 288K (15°C) における飽和水蒸気圧 P_v は $1.7 \times 10^3 \text{Pa}$, 1mol あたりの蒸発潜熱 Δh は $4.4 \times 10^4 \text{J/mol}$ (一定), $C_{pn} = \frac{7}{2}R$, 地表面気圧は 10^5Pa とする.

(A)~(C) を以下の手順に沿って解き, 気塊の圧力 P , 温度 T , 水蒸気モル分率 x_v の高度変化を求め, 表とグラフにまとめよ. 計算には計算機を利用してよい.

- (1) 高度を 1km ずつ区切り, n 番目の高度を $z_n = n \times 1\text{km}$ とする. この時地表は $n = 0$, 対流圏界面高度は $n = 10$ で表される.
- (2) (A) 式を用い $z = z_0$ における気温減率を求め, その気温減率が $z = z_1$ まで保たれるとして $z = z_1$ における気温を求めよ. 同時に (B) 式を用いて $z = z_1$ での大気圧を求めよ. さらに (C) 式を用いてと水蒸気分圧, 水蒸気モル分率を求めよ.
- (3) 再び (A) 式を用い $z = z_1$ における気温減率を求め, その気温減率が保たれるとして $z = z_2$ の気温を求めよ. 同時に (B) 式と (C) 式を用いて $z = z_2$ での大気圧と水蒸気分圧, 水蒸気モル分率を求めよ.
- (4) この手順を次々に繰り返して, $z = z_3, z_4, \dots, z_{10}$ における気温, 気圧, 水蒸気モル分率を求めよ.

この計算は, 高度の刻みが細かいほど精度があがる. 余裕がある場合は高度の刻みを細かくした数値計算を行っても良い.

7-2 前問で求めた各高度における気塊が，そこでの組成を保ちながら断熱的に地表（圧力 10^5Pa ）まで下降したとする．このとき地表に達した気塊の温度は 288 K よりも高くなる．その理由を定性的に述べ，実際の地球大気における同様の物理現象の例を一つ以上挙げて説明せよ．また高度 1km , 3km , 10km から下降したときの，地表における気塊の温度をそれぞれ求めよ．

8. 水惑星の条件

8-1 ハビタブルゾーン

ハビタブル惑星とは ハビタブル (habitable) は「生命の存在可能な」という意味である。地球型生命には液体の水が最も重要な必須物質である。そのため惑星がハビタブルであるためには、地表で液体の水が安定に存在することが必要と考えられる。

地球と同様の惑星を想定したときに、軌道が中心星に近く、惑星軌道上の日射が強すぎれば水は全て蒸発してしまう。逆に軌道が中心星から遠く、日射が弱すぎれば全て凍結してしまうであろう。液体の水が存在できる適度な日射を受けることのできる軌道範囲をハビタブルゾーンと呼ぶ。

太陽系の場合、ハビタブルゾーンは一般的には 0.8 AU~1.5 AU の範囲とされているが、これは条件設定による。水が 45 億年間宇宙空間へ逃げずに保持される条件などを加味すると実はもっと狭く 0.9 AU~1.1 AU とする研究もある。

ハビタブルゾーンの境界 水が全て蒸発してしまう内側の境界と、水が全て凍ってしまう外側の境界を決めるプロセスは単純ではない。しかしそれぞれについて、重要な「しくみ」が存在する。内側境界に関しては、水蒸気に飽和した大気には宇宙空間への熱放射フラックスに上限、すなわち射出限界が存在することが重要である。外側境界に関しては氷が惑星アルベドを増大させ日射の吸収を弱めるアイスアルベドフィードバックが重要である。

8-2 射出限界と暴走温室効果

基本的なアイデア もし大気がなければ、惑星の地表面温度が高いほど、その 4 乗に比例して熱放射が増大する。しかし惑星上に水が存在する場合には、大気中に水蒸気が存在する。水蒸気は強力な温室効果ガスであり、その大気中の存在量は気温が高いほど急速に増す。これによって惑星からの熱放射が頭打ちになる。

射出限界の導出 簡単のために対流圏界面の温度 T_{trop} の関数として大気上端からの正味上向きフラックスを求めることにする。そのために置く仮定は

- 成層圏では水蒸気の混合比は一定 (凝結が生じない)
- 成層圏は放射平衡かつ静水圧平衡にある
- 対流圏界面は水蒸気に飽和している
- 水蒸気のみが灰色の吸収特性を持ち、他の成分は透明

対流圏界面での水蒸気分圧は飽和蒸気圧 $P_v(T_{trop})$ で与えられる。すると混合比が一定の条件から、成層圏全体の水蒸気柱密度は P_v/g 、対流圏界面の大気上端から測った光学的深さ τ はこれに水蒸気の吸収係数 κ を乗じて $\tau = \kappa P_v/g$ と表される。

放射平衡解 (6.20) を思い出して

$$\pi B(T) = \sigma T(\tau)^4 = \frac{1}{2} F_{IR}^{top} \left(\frac{3}{2} \tau + 1 \right) \quad (6.20')$$

ここで σT_{eff}^4 を正味の上向き赤外放射 (大気上端から宇宙空間への放射に等しい) であることを明示するように F_{IR}^{top} と書き直した。この式を F_{IR}^{top} について解くと

$$F_{IR}^{top} = \frac{2\sigma T(\tau)^4}{\frac{3}{2}\tau + 1}$$

つまり

$$F_{IR}^{top} = \frac{2\sigma T_{trop}^4}{\frac{3}{2} \frac{\kappa P_v(T_{trop})}{g} + 1} \quad (8.1)$$

となる。ここに地球の重力加速度と飽和水蒸気圧の温度依存性を与え、正味上向き放射の対流圏界面温度への依存性を求めたのが図 8.1 である。ここでは水蒸気の吸収係数として 8-12 μm の窓領域 (吸収が最も弱く、地球からの熱放射がピークを持つ波長域) の典型値 $\kappa = 0.01 \text{ m}^2/\text{kg}$ を与えた。

この上限値を射出限界と呼ぶ。これよりも大きな日射吸収フラックスを与えると、水蒸気が飽和している大気は宇宙空間への熱放射が追いつかず、気温が一方向的に上昇してしまう。これは水蒸気による温室効果が気温を高め、さらに水蒸気が大気に供給されて温室効果が強まる、正のフィードバック機構による。これが暴走温室効果であり、ハビタブルゾーンの内側境界を決める重要な過程である。

8-3 アイスアルベドフィードバック

基本的なアイデア 自転軸傾斜の小さな惑星では、地表単位面積当たりの年平均日射量は高緯度ほど小さく、そこでは液体の水が凍結しやすい。氷はアルベドが大きいため太陽光の吸収を弱める。場合によってはこれによって、より低緯度も寒冷化して凍結し、さらに惑星全体のアルベドを低下させ赤道まで凍結が進むことが考えられる。これがアイスアルベドフィードバックである。

気候の多重性 アルベドの温度依存性を考えると、惑星の気候状態は同じ日射条件でも複数の解が許される場合がある。惑星の有効温度を求める式を地表面温

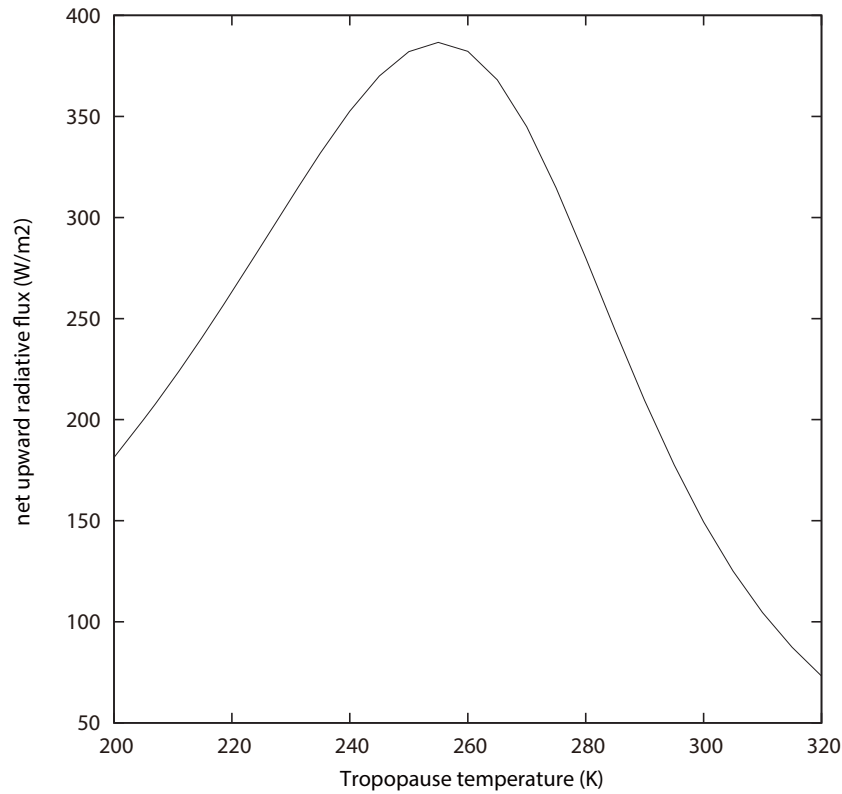


図 8.1 水蒸気に飽和した対流圏を持つ大気には正味上向き放射に上限値が現れる。

度を用いて書き換えて,

$$\sigma T_s^4 = \frac{F(1 - A(T_s))\left(1 + \frac{3}{4}\tau\right)}{4} \quad (8.2)$$

とする。ここでアルベドは

$$\begin{aligned} A &= 0.6 & T_s < 260 \text{ K} \\ A &= 0.3 & T_s > 290 \text{ K} \\ A &= 0.3 - 0.01 \times (T_s - 290) & 260 \text{ K} < T_s < 290 \text{ K} \end{aligned}$$

と置く。これは気温が十分低ければ地球のアルベドは氷床の値になり、十分高ければ、氷床のない地球の値（雲できまる）になるものとし、中間の温度範囲では温度に比例して変化すること（部分凍結）を仮定している。

$F = 1370 \text{ W/m}^2$, $3\tau/4 = 0.7$ を現在の地球を想定した値とし、さらに F を倍にした時（金星軌道）、 F を $1/2$ にした時（火星軌道）について、(8.2) を満たす解の関係を図 8.2 に示した。これは (8.2) の左辺と右辺ををそれぞれ図示したもので、交点が解を示す。

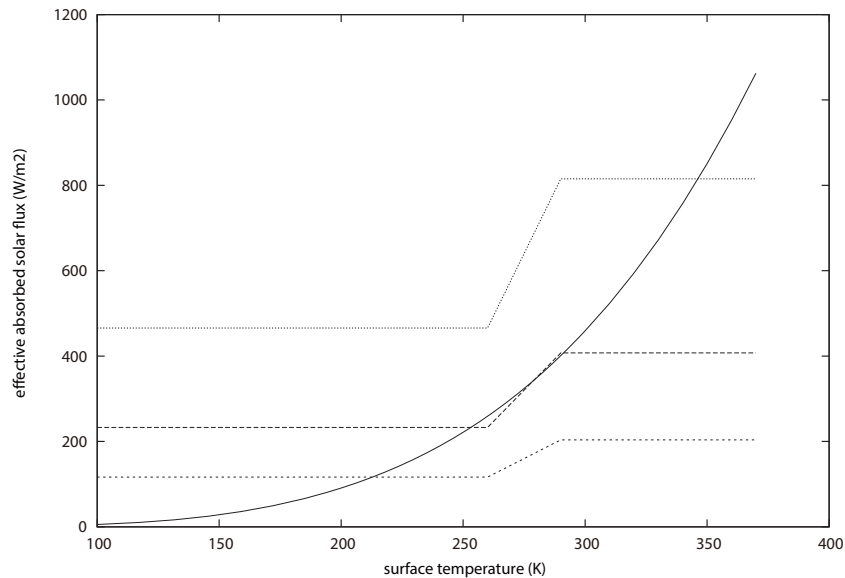


図 8.2 アルベドの温度依存性を考えると、惑星の気候状態は同じ日射条件でも複数の解が許される

ここから、地球を想定したケースでは、3つの解(完全凍結解, 部分凍結解, 無凍結解)があることが分かる。一方で火星軌道を想定し弱い太陽放射を与えたケースでは完全凍結解しか存在しない。

このモデルによれば温室効果が強まる, すなわち τ が大きくなると, 日射が弱くても現在の地球に近い解が得られることに注意が必要である。

第 8 章の問題

8.1 暴走温室効果が発生した場合, 海洋は全て蒸発してほぼ水蒸気のみからなる大気が形成される。このような大気の平衡構造について次の手順に沿って考察せよ。

- (1) 大気は水蒸気のみからなり, 平行平板灰色大気の仮定が成り立つものとする。水蒸気は理想気体, 惑星放射に対する吸収係数 κ は一定とする。正味上向き放射フラックスの値が大きく, 大気の光学的深さが極めて大きい場合には気温と圧力の間に近似的に $T^4 \propto P$ の関係が成り立つことを示せ。また水蒸気の定圧モル比熱は $4R$ (R は気体定数)で近似できる。このとき水蒸気の断熱過程においても $T^4 \propto P$ の関係が成り立つことを確かめよ。これらが一致することから, 水蒸気のみ灰色大気の放射対流平衡解は放射平衡解で近似できることが分かる。
- (2) 地表面大気圧と正味上向き放射フラックスが十分に大きければ, 地表が高温になり, 岩石が溶けてマグマオーシャンが形成される。水蒸気大

気の温室効果でマグマオーシャンが形成されるのに必要な、全大気圧 (P_s) と正味上向き放射 F_{IR}^{top} の条件を定式化し図に示せ. 重力加速度は 9.8 m/s^2 , 岩石の融点は $T_m = 1500 \text{ K}$ とする. また水蒸気の吸収係数に $5.7 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{kg}$ を用いよ².

- (3) 仮に地球を金星軌道 (0.72AU) に移動させたときに, 海洋が蒸発して生じた水蒸気大気によって, マグマオーシャンが形成されるかどうか考察せよ. 海洋が蒸発して生じる水蒸気大気の地表面気圧は, 海洋質量 $1.4 \times 10^{21} \text{ kg}$ から計算できる. また正味上向き放射フラックスは, $F(1-A)/4$ に等しい. ここで F は軌道上の太陽放射フラックス (軌道半径の2乗に反比例), アルベド A は $0 \sim 1$ までの範囲を取り得る.

²水蒸気の典型的な吸収係数の値 $0.01 \text{ m}^2/\text{kg}$ (これを κ_0 と記す) は, 気体の全圧が1気圧 (P_0 と記す) の場合の窓領域における典型的な吸収係数である. 水蒸気の吸収係数はおおよそ圧力 P に比例し, $\frac{P}{P_0} \kappa_0$ と置ける. 純粋な水蒸気大気を想定した場合, 大気上端からの光学的深さが $\tau = 2/3$ となる高度 (この高度の気温の黒体放射が, 宇宙空間への惑星放射に一致する) の圧力は $P = \left(\frac{4}{3} \frac{P_0 g}{\kappa_0}\right)^{1/2}$ と求まる. 吸収係数が圧力に依らない大気モデルで近似するには, この圧力面での光学的深さが $2/3$ になるよう実効的な吸収係数 κ をとる. その表式は $\kappa = \left(\frac{\kappa_0}{3P_0 g}\right)^{1/2}$ となる.