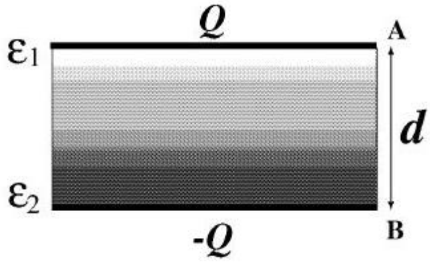
問 1 図のような誘電率が一方の極板 A のところで ϵ_1 で、それから距離に比例して増加し他方の極板 B のところで ϵ_2 になるように誘電体を詰めた、間隔 d で極板面積 S の平行平板コンデンサーを考える。但し、電極の端での電場の乱れを無視する。



1-1. 電荷 Q の真電荷を極板 A に与え、電荷 $-Q$ の真電荷を極板 B に与えたとき極板 A から距離 x での電場を求めよ。

極板 A を原点として下向きを正とする x 軸を用意する。
A から距離 x $(0 \leq x \leq d)$ での誘電率を $f_\epsilon(x)$ とする。$f_\epsilon(0) = \epsilon_1$ $f_\epsilon(d) = \epsilon_2$ であるので、

$$f_\epsilon(x) = (\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d})x + \epsilon_1$$

である。これより距離 x での電場を求める。ガウスの法則より、

$$\int_s f_\epsilon(x)E\ ds = Q$$

$$E = \frac{Qd}{Sd\epsilon_1 + S(\epsilon_2 - \epsilon_1)x} \tag{1}$$

これより、距離 x における電場が求まった。

1-2. 次いで極板間の電位差 V を求め、この平行平板コンデンサーの容量 C を求めよ。

(1) より

$$V = \int_0^d E\ ds = \frac{Qd}{s}\int_0^d \frac{1}{d\epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)x}\ dx$$

$$V = \frac{Qd}{s(\epsilon_2 - \epsilon_1)} \log \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

また、$Q = CV$ より C が求まる。

$$C = \frac{s(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d}(\log\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1})^{-1}$$

1-3. このコンデンサーを時刻 $t = 0$ で抵抗 R を持つ内部抵抗で極板 A、B を繋ぎ、放電させた。時刻 t に流れる電流 $I(t)$ を求めよ。

回路を一周した時の電位差は 0 なので、$V = IR$ より

$$IR - \frac{Q}{C} = 0 \tag{2}$$

この回路ではコンデンサーに蓄えられている電荷が減ることによって電流が流れれるので、

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

である。(2) 式の両辺を t で微分する

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC}I$$

$$I(t) = A\exp(-\frac{1}{RC}t)$$

ここで $t = 0$ ではコンデンサーが作る電位差のみがついているので、

$$V(t = 0) = \frac{Q}{C}$$

$$I(t = 0) = \frac{Q}{RC}$$

である。よって時刻 t に流れる電流 $I(t)$ は

$$I(t) = \frac{Q}{CR}\exp(-\frac{1}{RC}t)$$

である。

1-4. 放電が完了するまでに抵抗で消費されたエネルギーは初めにコンデンサーに蓄えられていたエネルギーに等しいことを示せ。

はじめにコンデンサーに蓄えられていたエネルギー E_c は

$$E_c = \frac{Q^2}{2C}$$

である。一方で放電が完了するまでに抵抗で消費されたエネルギー E_R は

$$E_R = \int_0^{\infty} I^2 R\ dt = \int_0^{\infty} \frac{Q^2}{C^2 R} \exp\left(-\frac{2}{RC}t\right)\ dt$$

$$E_R = \frac{Q^2}{2C}$$

よって放電が完了するまでに抵抗で消費されたエネルギーは初めにコンデンサーに蓄えられていたエネルギーに等しいことが示された。