問2 次の設問 (2-1 ~ 2-4) に答えなさい。

2-1. $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して次の式を導きなさい。

(1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(1)(答案)

$$N_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx$$

とする

$$N_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{2n-1} x dx$$

上式に部分積分を実行すると

$$N_n = (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{2n-2} x dx$$

$$N_n = (2n-1)(N_{n-1} - N_n)$$

$$N_n = \frac{2n-1}{2n} N_{n-1}$$

が得られる。

この式より

$$N_n = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{5}{6} \frac{3}{4} N_1$$

となる。 N_1 を求める。

$$N_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

$$N_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$N_1 = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

以上より、 N_n の値は

$$N_n = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

となり、(1) が示された。

(2)(答案)

$$M_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx$$

とする (1) と同様に部分積分を実行すると

$$M_n = \frac{2n}{2n+1} M_{n-1}$$

が得られる。

この式より

$$M_n = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} M_1$$

となる。 M_1 を求める。

$$M_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$$

$$M_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x - \sin x \cos^2 x dx$$

$$M_1 = \frac{2}{3}$$

以上より、 M_n の値は

$$M_n = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \frac{2}{3}$$

となり、(2) が示された。

2-2. 前問 2-1 の結果を用いて、次の関係を導きなさい。

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots$$

(答案)

(1)、(2)の結果を組み合わせることにより

$$\frac{M_n}{N_n} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} \frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} \frac{2}{\pi}$$

$$\frac{N_n}{M_n} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

を得る。ここで上式で $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{N_n}{M_n} \rightarrow 1$ となれば題意を満たすことになる。

よって $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{N_n}{M_n} \rightarrow 1$ となることを示す。

ここで

$$\frac{N_n}{M_n} = F$$

とおく。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ では $\sin x < 1$ より

$$\sin^{2n+1} < \sin^{2n}$$

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$$

が成り立つ。上式の辺々を 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで積分すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx$$

となる。辺々を $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx$ で割ると

$$1 < F < \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx}$$

となる。ここで、(2) より

$$M_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx$$

$$M_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx$$

$$M_n = \frac{2n}{2n+1} M_{n-1}$$

の関係があるので

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx} = \frac{2n+1}{2n}$$

と表すことができる。よって $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{2n+1}{2n} = \frac{1}{2n} + 1 \rightarrow 1$$

が得られる。以上により $n \rightarrow \infty$ のとき $F \rightarrow 1$ となり

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots$$

が導かれた。

2-3. 次の値を求めなさい。

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

(答案)

$$N = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

とおく.

$$N^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

$$N^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$$

$$N^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

ここで, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおくと上式は

$$N^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\theta$$

と書くことができる。これより、

$$N^2 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr$$

$$N^2 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2}$$

$$N = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となり N が求まった。

2-4. 前問 2-3 の結果を用いて、次の値を求めなさい。

(1)

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$$

(2)

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$$

(答案)

$$N = \int_0^{\infty} e^{-ix^2} dx$$

として 2-3 のときと同様に計算すると

$$N = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{i}}$$

となる。

$$i = \cos\left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi + i \sin\left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi$$

より、

$$i^{-\frac{1}{2}} = \cos\left(-\frac{1}{4} - n\right)\pi + i \sin\left(-\frac{1}{4} - n\right)\pi$$

$$i^{-\frac{1}{2}} = \cos\left(\frac{1}{4} + n\right)\pi - i \sin\left(\frac{1}{4} + n\right)\pi$$

なので、

$$N = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left\{ \cos\left(\frac{1}{4} + n\right)\pi - i \sin\left(\frac{1}{4} + n\right)\pi \right\}$$

k を整数とする。 $n = 2k$ のとき、

$$\cos\left(\frac{1}{4} + n\right)\pi = \sin\left(\frac{1}{4} + n\right)\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$N = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1 - i) \quad (1)$$

$n = 2k + 1$ のとき、

$$\cos\left(\frac{1}{4} + n\right)\pi = \sin\left(\frac{1}{4} + n\right)\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$N = -\frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1 - i) \quad (2)$$

となる。

また、

$$N = \int_0^\infty e^{-ix^2} dx = \int_0^\infty \cos x^2 + i \sin x^2 dx \quad (3)$$

なので (1) ~ (3) 式を比べることにより、

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}}{4} & (n = 2k) \\ -\frac{\sqrt{2\pi}}{4} & (n = 2k + 1) \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2\pi}}{4} & (n = 2k) \\ \frac{\sqrt{2\pi}}{4} & (n = 2k + 1) \end{cases} \quad (5)$$

が求まる。(4) が 2-3 の (1) の答えであり、(5) が 2-3 の (2) の答えである。