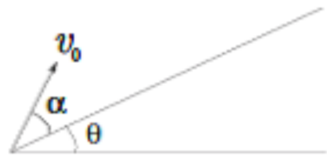
問題 I

■問 1

物体を，水平面と角度 θ をなす斜面に向けて，斜面に対して α の角度と初速 v_0 で投げ上げる (下図参照)．ただし，$\alpha+\theta<\pi/2$ であり，また，空気抵抗の影響は無視できるものとする．重力加速度を g として以下の問いに答えよ．



1-1.　斜面に再び落ちるまでの時間 T と斜面に沿った到達距離 X を求めよ．

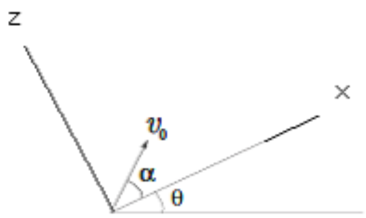


図 1　x 方向と z 方向の設定

質量を m とする．座標軸は上図のようにとる．x 方向，z 方向の運動方程式は,

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg\sin\theta \\ m\ddot{z} = -mg\cos\theta \end{cases}$$

となる．よって x 方向については,

$$\begin{cases} \ddot{x} = -g\sin\theta \\ \\ \dot{x} = -gt\sin\theta + v_0\cos\alpha \\ \\ x = -\dfrac{1}{2}gt^2\sin\theta + v_0t\cos\alpha \end{cases}$$

z 方向については,

$$\begin{cases} \ddot{z} = -g\cos\theta \\ \\ \dot{z} = -gt\cos\theta + v_0\sin\alpha \\ \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2\cos\theta + v_0 t\sin\alpha \end{cases}$$

$z = 0$ のとき $t = T$ より.

$$gT^2\cos\theta - 2v_0T\sin\alpha = 0$$
$$T(gT\cos\theta - 2v_0\sin\alpha) = 0$$

$T > 0$ より,

$$T = \frac{2v_0\sin\alpha}{g\cos\theta}$$

このとき $x = X$ より,

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{2}gT^2\sin\theta + v_0T\cos\alpha \\ \\ &= -\frac{1}{2}g\frac{4v_0^2\sin^2\alpha}{g^2\cos^2\theta}\sin\theta + v_0\frac{2v_0\sin\alpha}{g\cos\theta}\cos\alpha \\ \\ &= \frac{2v_0^2\sin\alpha}{g\cos\theta}\left(\cos\alpha - \frac{\sin\theta\sin\alpha}{\cos\theta}\right) \\ \\ &= \frac{2v_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\theta}(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) \\ \\ &= \frac{2v_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\theta}\cos(\theta+\alpha) \end{aligned}$$

1-2.　到達距離を最大にするための角度 α はいくらか？

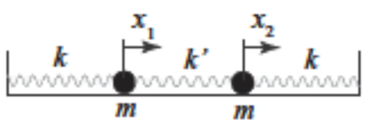
距離が最大ということは $dX/d\alpha = 0$ を考えればよい.

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\alpha} &= \frac{2v_0^2\cos\alpha}{g\cos^2\theta}\cos(\theta+\alpha) - \frac{2v_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\theta}\sin(\theta+\alpha) \\ \\ &= \frac{2v_0^2\cos\alpha}{g\cos^2\theta}\cos(\theta+2\alpha) \end{aligned}$$

$\dfrac{dX}{d\alpha} = 0$ となるとき，$\cos(\theta + 2\alpha) = 0$ である．
$\theta + \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ より $\theta + 2\alpha < \pi$ である．
よって，$\theta + 2\alpha = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}$ となる．

■問 2

同じ質量 m を持つ二つの質点 1 と 2 が，それぞれ左右の壁にばね定数 k のばねで水平に結ばれ，また，互いにばね定数 k' のばねでつながれている (下図参照)．それらの静止位置からの右方向への変位をそれぞれ x_1 と x_2 とする．質点と床との間に摩擦はないものとして，以下の問いに答えよ．



2-1.　この質点系のラグランジアン L を書き下せ．
運動エネルギー T は,

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

ポテンシャルエネルギー V は,

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

よって，ラグランジアン L は,

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \end{aligned}$$

2-2.　ラグランジュの運動方程式を求めよ．オイラー・ラグランジュの方程式より,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = m\ddot{x}_1 + kx_1 - k'(x_2 - x_1) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = m\ddot{x}_2 + k'(x_2 - x_1) + kx_2 = 0$$

よって,

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -(k+k')x_1 + k'x_2 \\ m\ddot{x}_2 = k'x_1 - (k+k')x_2 \end{cases} \tag{1}$$

となる.

2-3. 基準振動の角振動数を求めよ.

ここで,$x_1 = A_1 \exp i\omega t$,$x_2 = A_2 \exp i\omega t$ と仮定して 2-2 の答えに代入すると,

$$\begin{cases} -\omega^2 m A_1 + (k+k')A_1 - k'A_2 = 0 \\ -\omega^2 m A_2 - k'A_1 + (k+k')A_2 = 0 \end{cases}$$

となる.A_1,A_2 は定数である.よって,

$$\begin{cases} (k+k'-m\omega^2)A_1 - k'A_2 = 0 \\ -k'A_1 + (k+k'-m\omega^2)A_2 = 0 \end{cases}$$

今,A_1,$A_2 \neq 0$ より,

$$\begin{vmatrix} k+k'-m\omega^2 & -k' \\ -k' & k+k'-m\omega^2 \end{vmatrix} = (k+k'-m\omega^2)^2 - k'^2 = 0$$

である.これを変形すると,

$$m^2\omega^4 - 2(k+k')m\omega^2 + (k^2+2kk') = 0$$

よって,

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{(k+k')m \pm \sqrt{(k+k')^2m^2 - m^2(k^2+2kk')}}{m^2} \\ &= \frac{(k+k') \pm k'}{m} \end{aligned}$$

$\omega > 0$ より,

$$\omega = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}, \quad \sqrt{\frac{k}{m}}$$

である.

2-4. 振動の一般解を求めよ.

式 (1) の上の式と下の式を足すと,

$$m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = -kx_1 - kx_2$$

式 (1) の上の式と下の式を引くと，

$$m\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_2 = -(k+2k')x_1 + (k+2k')x_2$$

⇔

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = \dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{k}{m}x_2 \\[2ex] \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\dfrac{k+2k'}{m}x_1 + \dfrac{k+2k'}{m}x_2 \end{cases}$$

となる．ここで，$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$，$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}}$，$X_1 = x_1 + x_2$，$X_2 = x_1 - x_2$ とすると，

$$\begin{cases} \ddot{X}_1 = -\omega_1^2 X_1 \\ \ddot{X}_2 = -\omega_2^2 X_2 \end{cases}$$

となる．よって，

$$\begin{cases} X_1 = a_1 \cos\omega_1^2 t + a_2 \sin\omega_1 t \\ X_2 = b_1 \cos\omega_2^2 t + b_2 \sin\omega_2 t \end{cases}$$

である．ここで a_1，a_2，b_1，b_2 は定数である．

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + x_2 \\ X_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

より一般解は，

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(a_1\cos\omega_1 t + a_2\sin\omega_1 t + b_1\cos\omega_2 t + b_2\sin\omega_2 t) \\[2ex] x_2 = \dfrac{1}{2}(a_1\cos\omega_1 t + a_2\sin\omega_1 t - b_1\cos\omega_2 t - b_2\sin\omega_2 t) \end{cases}$$

である．

2-5. 時刻 $t=0$ における質点 1 の変位と初速度がそれぞれ $x_1 = a$ および $\dot{x}_1 = 0$，質点 2 の変位と初速度がそれぞれ $x_2 = 0$，$\dot{x}_2 = 0$ であった．時刻 $t>0$ における $x_1(t)$ と $x_2(t)$ の具体形を求めよ．

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(a_1\cos\omega_1 t + a_2\sin\omega_1 t + b_1\cos\omega_2 t + b_2\sin\omega_2 t) \\[2ex] x_2 = \dfrac{1}{2}(a_1\cos\omega_1 t + a_2\sin\omega_1 t - b_1\cos\omega_2 t - b_2\sin\omega_2 t) \end{cases}$$

より，

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{1}{2}(-a_1\omega_1 \sin\omega_1 t + a_2\omega_1\cos\omega_1 t - b_1\omega_2\sin\omega_2 t + b_2\omega_2\cos\omega_2 t) \\ \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{2}(-a_1\omega_1 \sin\omega_1 t + a_2\omega_1\cos\omega_1 t + b_1\omega_2\sin\omega_2 t - b_2\omega_2\cos\omega_2 t) \end{cases}$$

である．$t=0$ のとき，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(a_1+b_1) = a \\ \\ \dfrac{1}{2}(a_1-b_1) = 0 \end{cases}$$

より，

$$a_1 = a, \quad b_1 = a$$

また，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(a_2\omega_1+b_2\omega_2) = 0 \\ \dfrac{1}{2}(a_2\omega_1-b_2\omega_2) = 0 \end{cases}$$

より，

$$a_2 = b_2 = 0$$

である．よって x_1, x_2 の具体形は、

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2}\left(\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \cos\sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}}t\right) \\ \\ x_2 = \dfrac{a}{2}\left(\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t - \cos\sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}}t\right) \end{cases}$$

である．

2-6.　前問において $k' \ll k$ が成立する場合の $x_1(t)$ の概形を描け．

$k' \ll k$ のとき，

$$x_1 = a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

である．

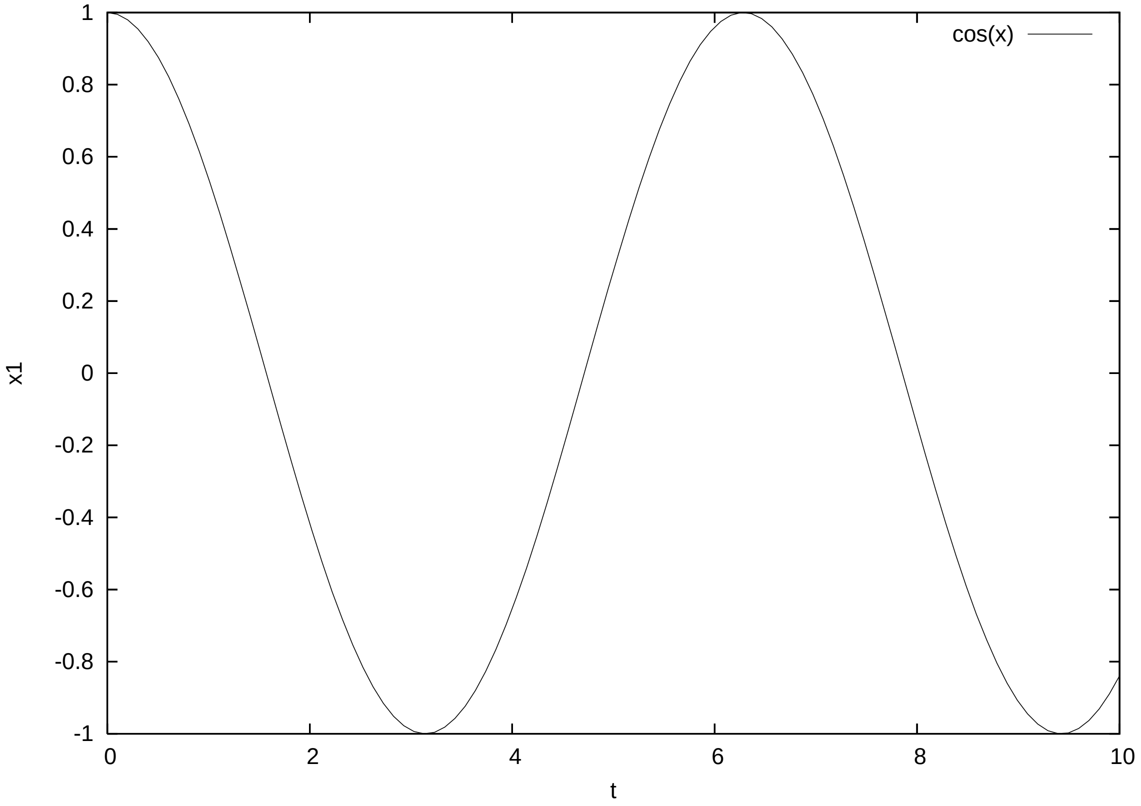


図 2　$x_1 = a\cos\sqrt{k/m}t,\ (a = 1,\ \sqrt{k/m} = 1)$